



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ  
ΔΙΚΤΥΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τυφλές τεχνικές εκτίμησης φέρουσας και καναλιού σε ασύρματα  
τηλεπικοινωνιακά συστήματα CDMA

Σταμάτης Σιβίτος

5 Ιουλίου 2005



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.:	4473/1
Ημερ. Εισ.:	15-05-2006
Δωρεά:	Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός:	ΠΤ- ΜΗΥΤΔ
	2005
	ΣΙΒ

*Αφιερωμένο στους γονείς μου Νίκο και Μένη, για  
την αμέριστη συμπαράσταση και υποστήριξή τους*

# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Γεώργιο Μουστακίδη που μου έδωσε την ευκαιρία να συνεργαστώ στενά μαζί του στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, για την παροχή οποιασδήποτε βοήθειας και προπάντων για την ηθική υποστήριξη που μου παρείχε όλο αυτό το χρονικό διάστημα. Οι συστάσεις, υποδείξεις και ο τρόπος καθοδήγησής του στάθηκαν καθοριστικός παράγοντας προς την επίτευξη αυτού του σκοπού.

# Εισαγωγικά

Στα CDMA συστήματα, σε κάθε χρήστη γίνεται η ανάθεση μιας κυματομορφής υπογραφής την οποία και χρησιμοποιεί για τη μετάδοση του σήματος του. Οι υπογραφές αυτές, όντας μεταξύ τους ορθογώνιες επιτρέπουν τα σήματα διαφορετικών χρηστών να επικαλύπτονται στο χρόνο και τη συχνότητα. Ο δέκτης (κινητό) του χρήστη ενδιαφέροντος, λαμβάνει το σήμα που εκπέμπεται από τον σταθμό βάσης και πρέπει να είναι σε θέση να ανιχνεύσει την πληροφορία που αφορά αυτόν και να την απομονώσει από το υπόλοιπο σήμα που αποτελεί για αυτόν παρεμβολή. Για να γίνει κάτι τέτοιο, είναι απαραίτητη η γνώση της κυματομορφής υπογραφής.

Εξαιτίας όμως του πολυοδικού φαινομένου (*multipath*) που εισάγει το κανάλι, η διάρκεια της υπογραφής αυξάνεται λόγω της συνέλιξης της με την χροστική απόκριση του καναλιού. Το αποτέλεσμα της συνέλιξης αυτής στη συνέχεια θα χαρακτηρίζεται ως σύνθετη υπογραφή (*composite signature*). Προκειμένου λοιπόν να είναι δυνατή η ανίχνευση, θα πρέπει να προηγηθεί η εκτίμηση του άγνωστου καναλιού.

Εκτός από το κανάλι μία δεύτερη παράμετρος που λαμβάνουμε υπ' όψη είναι το σφάλμα φέρουσας (*carrier offset*). Γενικά στους δέκτες ενός ασύρματου τηλεπικοινωνιακού συστήματος παράγεται ένα ημιτονοειδές σήμα από έναν τοπικό ταλαντωτή, το οποίο θα πολλαπλασιαστεί με το λαμβανόμενο σήμα έτσι ώστε αυτό να μεταβεί από την ζώνη μετάδοσης (*RF*) στην ενδιάμεση ζώνη (*IF*) ή βασική ζώνη συχνοτήτων (*baseband*) για περαιτέρω επεξεργασία. Όταν πομπός είναι ο σταθμός βάσης και οι δέκτες τα κινητά των χρηστών, λόγω του διαφορετικού ταλαντωτή σε κάθε κινητό θα υπάρχει ένα μικρό υπόλοιπο φέρουσας (*residual carrier*) μετά από τον παραπάνω πολλαπλασιασμό, το οποίο και καλούμε σφάλμα φέρουσας.

Οι πιο πρόσφατες τυφλές (*blind*) τεχνικές από κοινού εκτίμησης καναλιού και σφάλματος φέρουσας (*joint channel and carrier offset estimation*) σε συγχρονισμένα συστήματα CDMA, βασίζονται στη μορφοποίηση του προβλήματος από τους Hui Lui και Guanghan Xu [1]. Λαμβάνοντας υπ' όψη μόνο το πολυοδικό φαινόμενο προχωρούν σε μία εκτίμηση του καναλιού, μέσω μιας τεχνικής που βασίζεται στην ανάλυση των υπόχωρων σήματος και θορύβου από τα δεδομένα που λαμβάνει ο δέκτης. Οι Kemin Li και Hui Lui [2] προχωρούν στην από κοινού εκτίμηση του καναλιού και του σφάλματος φέρουσας μέσω της επίλυσης ενός πολυωνυμικού προβλήματος ιδιοτιμών, ενώ οι Samir Attallah και Hongyi Fu [3] μετατρέπουν το παραπάνω σε γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών.

Κύριο χαρακτηριστικό των τεχνικών αυτών είναι ότι βασίζονται στα δείγματα της υπογραφής του χρήστη ενδιαφέροντος τα οποία μένουν ανεπηρέαστα από τη διασυμβολική παραμβολή καθώς και ότι απαιτούν τη γνώση της διάστασης του υπόχωρου του θορύβου. Έχοντας την πληροφορία αυτή πραγματοποιούν μια Ανάλυση σε Ιδιάζουσες τιμές (*Singular Value Decomposition - SVD*) ανάλυση σε έναν πίνακα μεγάλης διάστασης προκειμένου να πάρουν μία βάση για τον υπόχωρο του σήματος και του θορύβου και στη συνέχεια εκμεταλλευόμενοι την καθετότητα των δύο υπόχωρων εκτελούν μία δεύτερη SVD ανάλυση για να πάρουν μία από κοινού εκτίμηση του καναλιού και του σφάλματος φέρουσας.

Αντίθετα, οι Doukopoulos και Moustakides [4], εξετάζουν το πρόβλημα της εκτίμησης του

καναλιού απουσίας του σφάλματος φέρουσας, αντικαταστήνοντας την αρχική SVD ανάλυση για τον προσδιορισμό των βάσεων των δύο υποχώρων με τον υπολογισμό της δύναμης ενός πίνακα. Με τον τρόπο αυτό δεν είναι απαραίτητη η γνώση της διάστασης του χώρου του θορύβου, ενώ λαμβάνονται υπ' όψη όλα τα δείγματα της σύνθετης υπογραφής του χρήστη, κάνοντας έτσι ρεαλιστική τη λύση του προβλήματος.

Στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής θα εξεταστούν οι παραπάνω τεχνικές, παρουσιάζοντας αναλυτικά τη μοντελοποίηση του προβλήματος και την τεχνική ανάλυσης υποχώρων. Έπειτα θα εφαρμοστεί η μεθοδολογία του [4] στο πρόβλημα της από κοινού εκτίμησης καναλιού και σφάλματος φέρουσας, παράγοντας μία διαφορετική λύση και μάλιστα μικρότερης πολυπλοκότητας από αυτή που υπάρχει στη βιβλιογραφία μέχρι τώρα. Συγκεκριμένα, η δομή που ακολουθείται είναι η εξής:

Στο **Κεφάλαιο 1** γίνεται η μοντελοποίηση του προβλήματος, με βάση το [1], καθορίζοντας το CDMA σήμα βασικής ζώνης που προορίζεται για έναν χρήστη. Εξετάζεται η διασυμβολική παρεμβολή λόγω του πολυοδικού φαινομένου που εισάγει το κανάλι, ενώ απομονώνονται τα δείγματα της σύνθετης υπογραφής του χρήστη που παραμένουν ανεπηρέαστα. Στη συνέχεια, καθορίζεται το σήμα που λαμβάνεται από το κινητό του χρήστη ενδιαφέροντος, το οποίο αποτελεί την υπέρθεση  $P$  σημάτων που εκπέμπονται από το σταθμό βάσης, κάθε ένα από τα οποία προορίζεται για έναν από τους  $P$  χρήστες του συστήματος.

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο από τα δεδομένα που λαμβάνονται γίνεται ανάλυση των υποχώρων σήματος και θορύβου καθώς και το πώς εκτιμάται το κανάλι.

Στο **Κεφάλαιο 3** εισάγεται η παράμετρος του σφάλματος φέρουσας στο πρόβλημα, γίνεται ανάλυση υποχώρων και πραγματοποιείται η από κοινού εκτίμηση του, με το κανάλι με βάση τις τεχνικές που προτείνονται στα [2] και [3], τα οποία και συγκρίνονται μεταξύ τους.

Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται η φιλοσοφία της τεχνικής του [4] και προσαρμόζεται στο πρόβλημά μας. Μετά από σύγκριση με τα παραπάνω καταλήγουμε στην καλύτερη απόδοσή της και μικρότερη πολυπλοκότητά της.

Τέλος στο **Παράρτημα** έχει προστεθεί ο κώδικας των προσομοιώσεων, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν σε Matlab.

# Περιεχόμενα

1	Μοντελοποίηση Δεδομένων	5
2	Ανάλυση Υποχώρων & Εκτίμηση Καναλιού	11
3	Από Κοινού Εκτίμηση Καναλιού και Σφάλματος Φέρουσας	18
4	Μέθοδος Έψωσης σε Δύναμη	32
A'	Κώδικας <i>Matlab</i>	42

# Κεφάλαιο 1

## Μοντελοποίηση Δεδομένων

### Σήμα Βασικής Ζώνης για έναν χρήστη

Θεωρούμε τις παρακάτω παραμέτρους:

$\{s_n\}$  : η ακολουθία των συμβόλων πληροφορίας

$T_s$  : η διάρκεια του κάθε συμβόλου

$L_c$  : το πλήθος των chip - κέρδος αναπτύγματος (spreading gain)

$\{c_1 \dots c_{L_c} | c_k = \pm 1\}$  : ο κωδικός του χρήστη

$T_c$  : η διάρκεια του κάθε chip

$p(t)$  : η κυματομορφή chip με  $p(t) = 1$  όταν  $0 \leq t < T_c$

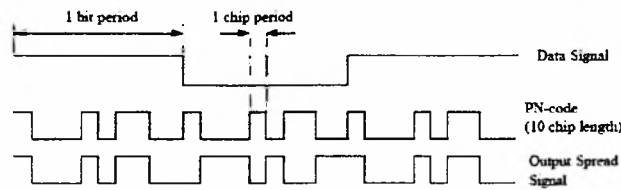
Η κυματομορφή υπογραφής του χρήστη (διάρκειας  $T_s$ ) είναι :

$$w(t) = \sum_{k=1}^{L_c} c_k p(t - kT_c) \quad ,$$

ενώ το CDMA σήμα βασικής ζώνης του έχει ως εξής :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n w(t - nT_s) \quad (1.1)$$





Σχήμα 1.1: CDMA σήμα βασικής ζώνης για διαμόρφωση BPSK

Δειγματοληπτούμε το  $y(t)$  με ρυθμό δειγματοληψίας  $R_c = \frac{1}{T_c}$  (chip rate), λαμβάνοντας από κάθε σύμβολο  $L_c$  δείγματα. Τα δείγματα που προκύπτουν από τη δειγματοληψία του  $n$ -οστού συμβόλου είναι :

$$y(nT_s + T_c), y(nT_s + 2T_c), \dots, y(nT_s + L_c T_c) \quad , \quad T_s = L_c T_c$$

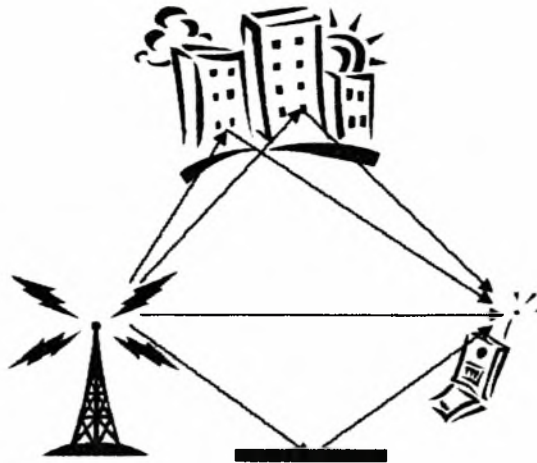
τα οποία προκύπτουν από την (1.1) ως εξής:

$$\begin{aligned} y(nT_s + iT_c) &= \sum_{k=1}^{L_c} s_n c_k p(nT_s + iT_c - kT_c - nT_s) \\ &= \sum_{k=1}^{L_c} s_n c_k \underbrace{p((i-k)T_c)}_{1, i=k} \\ \Rightarrow \begin{cases} y(nT_s + T_c) = s_n c_1 \\ y(nT_s + 2T_c) = s_n c_2 \\ \vdots \\ y(nT_s + L_c T_c) = s_n c_{L_c} \end{cases} &\Rightarrow \mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{L_c} \end{pmatrix} s_n \end{aligned}$$

Εξαιτίας της πολυοδικής διάδοσης, το σήμα που λαμβάνεται από το δέκτη αποτελείται από το αρχικό σήμα (σύμβολο) που ακολούθησε την απευθείας διαδρομή από τον πομπό προς αυτόν, καθώς και από ανακλάσεις του (λόγω φυσικών και τεχνητών εμποδίων), που φθάνουν καθυστερημένα ακολουθώντας διαφορετικές διαδρομές. Το φαινόμενο αυτό οδηγεί σε διασυμβολική παρεμβολή, η οποία αυξάνεται με την αύξηση του ρυθμού μετάδοσης. Για να μελετήσουμε την απόδοση των συστημάτων κινητών επικοινωνιών είναι βολικό να εισάγουμε ένα μέγεθος μέτρησης της διασποράς του καναλιού στο πεδίο του χρόνου, γνωστό ως διασπορά καθυστέρησης πολλαπλών διαδρομών (*multipath delay spread*). Η καθυστέρηση αυτή αφορά τη μέτρηση του του χρονικού διαστήματος που μεσολαβεί ανάμεσα στην άφιξη του αρχικού συμβόλου και της τελευταίας καθυστερημένης έκδοσης του.

Για το κανάλι, θεωρούμε ότι η χρουστική του απόκριση έχει διάρκεια  $LT_c$ , πολλαπλάσιο της περιόδου του chip. Από τη στιγμή που η μέγιστη καθυστέρηση που εισάγει το κανάλι είναι ασήμαντη σε σχέση με τη διάρκεια του συμβόλου  $T_s$  υποθέτουμε ότι  $L \ll L_c$ . Θα είναι:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{L_d} a_i p(t - \tau_i) \quad ,$$



Σχήμα 1.2: Το πολυοδικό φαινόμενο

όπου  $a_i$  το μιγαδικό κέρδος του καναλιού,  $\tau_i$  η καθυστέρηση του μονοπατιού  $i$  και  $L_d$  το πλήθος των μονοπατιών. Δειγματοληπτώντας το  $h(t)$  με ρυθμό δειγματοληψίας  $R_c = \frac{1}{T_c}$  (chip rate), παίρνουμε  $L$  δείγματα και μπορούμε πλέον να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως ένα FIR φίλτρο με συντελεστές τα  $L$  δείγματα:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_L \end{pmatrix}^T,$$

τα οποία συνιστούν το διάνυσμα του καναλιού (*channel vector*). Στη πορεία για τις διάφορες προσομοιώσεις θα χρησιμοποιηθούν δύο κανάλια. Ένα δύσκολο με χρονιστική απόκριση:

$$\mathbf{h} = [0.407 \ 0.815 \ 0.407]^T$$

και ένα εύκολο με χρονιστική απόκριση:

$$\mathbf{h} = [0.04 \ -0.05 \ 0.07 \ -0.21 \ -0.5 \ 0.72 \ 0.36 \ 0.21 \ 0.03 \ 0.07]^T$$

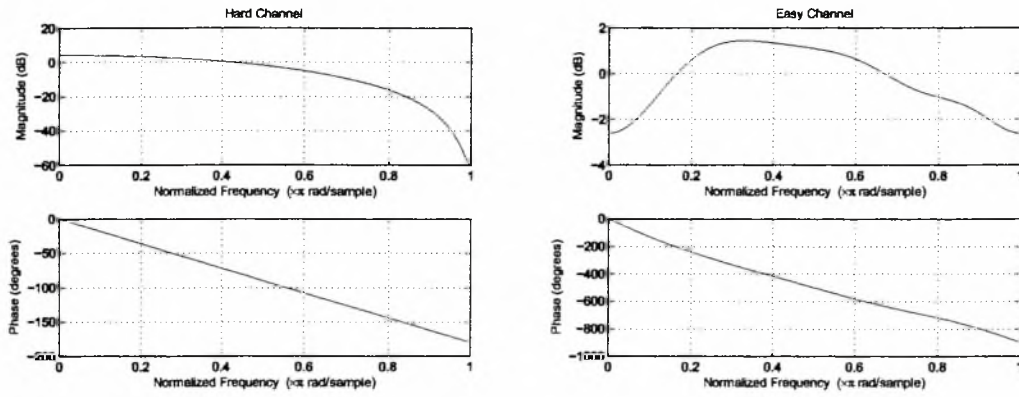
Η διάρκεια της υπογραφής  $w(t)$  του χρήστη τώρα, λόγω του πολυοδικού φαινομένου που εισάγει το κανάλι, θα αυξηθεί από  $L_c T_c$  σε  $(L_c + L)T_c$ .

$$w(t) = \sum_{k=1}^{L_c} c_k h(t - kT_c),$$

με τη διακριτή της μορφή να έχει ως εξής:

$$w_i = \sum_{k=1}^{L_c} c_k h(i - k + 1) = \sum_{k=1}^L h_k c(i - k + 1)$$

Επομένως, η ακολουθία  $\{w_i\}$  την οποία και στη συνέχεια θα αποκαλούμε σύνθετη υπογραφή αποτελεί τη συνέλιξη της ακολουθίας  $\{h_i\}$  μήκους  $L$  με την ακολουθία  $\{c_i\}$  μήκους  $L_c$  και θα έχει μήκος  $L_c + L - 1$ . Σε μορφή πινάκων η συνέλιξη αυτή γράφεται ως εξής:



(α') Δύσκολο κανάλι.

(β') Εύκολο κανάλι.

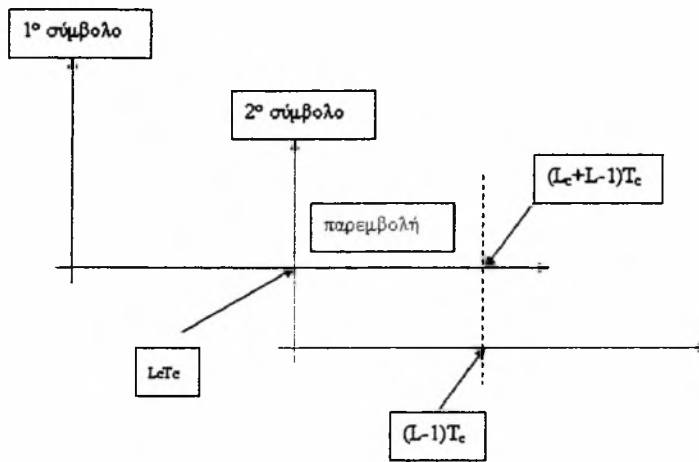
Σχήμα 1.3: Τα κανάλια των προσομοιώσεων

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{L_c+L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & c_2 & \dots & 0 \\ c_{L_c} & \vdots & \ddots & c_1 \\ 0 & c_{L_c} & \dots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{L_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_L \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{h} \quad ,$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{C}$  αποτελεί μία μήτρα *Toeplitz* διαστάσεων  $(L_c + L - 1) \times L$ . Εξαιτίας της αύξησης αυτής στην διάρκεια της υπογραφής κατά τη δειγματοληψία του  $n$ -οστού συμβόλου θα έχουμε παρεμβολή με το  $(n - 1)$ -οστό σύμβολο. Από το παρακάτω σχήμα, κατά τη δειγματοληψία του δεύτερου συμβόλου προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} y(T_s + T_c) \\ y(T_s + 2T_c) \\ y(T_s + 3T_c) \\ \vdots \\ y(T_s + (L - 1)T_c) \\ y(T_s + LT_c) \\ \vdots \\ y(T_s + L_cT_c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2w_1 + s_1w_{L_c+1} \\ s_2w_2 + s_1w_{L_c+2} \\ s_2w_3 + s_1w_{L_c+3} \\ \vdots \\ s_2w_{L-1} + s_1w_{L_c+L-1} \\ s_2w_L + 0 \\ \vdots \\ s_2w_{L_c} + 0 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 1.4: Τα δύο πρώτα σύμβολα

Συνεπώς μετά από τη δειγματοληψία του  $n$ -οστού συμβόλου τα δείγματα που λαμβάνουμε είναι τα εξής:

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} w_1 & w_{L_c+1} \\ w_2 & w_{L_c+2} \\ \vdots & \vdots \\ w_{L-1} & w_{L_c+L-1} \\ w_L & 0 \\ \vdots & \vdots \\ w_{L_c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_n \\ s_{n-1} \end{pmatrix}$$

Το τμήμα του  $\mathbf{y}_n$  το οποίο παραμένει ανεπηρέαστο από τη διασυμβολική παρεμβολή είναι:

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} w_L \\ \vdots \\ w_{L_c} \end{pmatrix} s_n \Rightarrow \mathbf{x}_n = \bar{\mathbf{w}} s_n$$

Για τα δείγματα  $w_i, i = L, \dots, L_c$  της σύνθετης υπογραφής του χρήστη που μένουν ανεπηρέαστα από την διασυμβολική παρεμβολή είναι:

$$w_i = \sum_{k=1}^L h_k c(i - k + 1) \quad , i = L, \dots, L_c$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_L \\ \vdots \\ w_{L_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_L & \dots & c_1 \\ c_{L+1} & \dots & c_2 \\ \vdots & & \vdots \\ c_{L_c} & \dots & c_{L_c-L+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_L \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{C} \mathbf{h} \quad ,$$

με την  $\mathbf{C}$  να αποτελεί μία μήτρα *Toeplitz* μεγέθους  $(L_c - L + 1) \times L$ .

### Σήμα Βασικής Ζώνης για $P$ χρήστες

Έστω τώρα ότι έχουμε  $P$  χρήστες. Για κάθε χρήστη  $i$ , το διάνυσμα με τα δείγματα του  $n$ -οστού συμβόλου που είναι απαλλαγμένα από τη διασυμβολική παραμορφολή είναι το εξής:

$$\mathbf{x}_i(n) = \begin{pmatrix} w_i(L) \\ \vdots \\ w_i(L_c) \end{pmatrix} s_i(n)$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_i(n) = \bar{\mathbf{w}}_i s_i(n) \quad , \bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i$$

Το διάνυσμα δεδομένων που λαμβάνει ο δέκτης θα αποτελεί το άθροισμα των διανυσμάτων  $\mathbf{x}_i(n)$ ,  $i=1 \dots P$ .

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = \sum_{i=1}^P \mathbf{x}_i(n) = \sum_{i=1}^P \bar{\mathbf{w}}_i s_i(n)$$

Το  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  λοιπόν θα αποτελείται από τα  $L_c - L + 1$  δείγματα του  $n$ -οστού συμβόλου, το οποίο και σχηματίζεται από την υπέρθεση των  $n$ -οστών συμβόλων των  $P$  χρηστών του συστήματος. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι έχουμε  $N$  διανύσματα  $\tilde{\mathbf{x}}_n$ ,  $n = 1 \dots N$  τα οποία προέρχονται από τη δειγματοληψία  $N$  συμβόλων που λαμβάνονται στο δέκτη.

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{w}}_1 s_1(1) + \bar{\mathbf{w}}_2 s_2(1) + \dots + \bar{\mathbf{w}}_P s_P(1) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 = \bar{\mathbf{w}}_1 s_1(2) + \bar{\mathbf{w}}_2 s_2(2) + \dots + \bar{\mathbf{w}}_P s_P(2) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}_N = \bar{\mathbf{w}}_1 s_1(N) + \bar{\mathbf{w}}_2 s_2(N) + \dots + \bar{\mathbf{w}}_P s_P(N) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 & \tilde{\mathbf{x}}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{w}}_1 & \bar{\mathbf{w}}_2 & \dots & \bar{\mathbf{w}}_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(1) & s_1(2) & \dots & s_1(N) \\ s_2(1) & s_2(2) & \dots & s_2(N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_P(1) & s_P(2) & \dots & s_P(N) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_{(L_c-L+1) \times N} = \mathbf{W}_{(L_c-L+1) \times P} \mathbf{S}_{P \times N}$$

## Κεφάλαιο 2

# Ανάλυση Υποχώρων & Εκτίμηση Καναλιού

### Απουσία θορύβου

Στη προηγούμενη παράγραφο καταλήξαμε ότι:

$$\mathbf{X}_{(L_c-L+1) \times N} = \mathbf{W}_{(L_c-L+1) \times P} \mathbf{S}_{P \times N}$$

Στη συνέχεια κάνουμε τις εξής παραδοχές:

1. Θεωρούμε ότι οι  $P$  στήλες του πίνακα  $\mathbf{W}_{(L_c-L+1) \times P}$ , δηλαδή τα διανύσματα υπογραφών  $\bar{\mathbf{w}}_i$ ,  $i = 1, \dots, P$  των χρηστών, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως οι στήλες του  $\mathbf{W}$  θα αποτελούν μία βάση του υποχώρου σήματος (*signal subspace*)
2. Θεωρούμε ότι οι  $P$  γραμμές του πίνακα  $\mathbf{S}_{P \times N}$ , δηλαδή τα σύμβολα των χρηστών, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως  $\text{rank}(\mathbf{W}) = \text{rank}(\mathbf{S}) = P$ .

Η στήλη  $i = 1, \dots, P$  του πίνακα  $\mathbf{X}$  αποτελεί γραμμικό συνδιασμό των  $P$  γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του  $\mathbf{W}$  με συντελεστές τα στοιχεία της  $i$  στήλης του  $\mathbf{S}$ . Επειδή  $P < N$  θα έχουμε μόνο  $P$  γραμμικά ανεξάρτητες στήλες στον  $\mathbf{X}$ , οπότε  $\text{rank}(\mathbf{X}) = P$ . Πραγματοποιώντας SVD ανάλυση στον πίνακα  $\mathbf{X}_{(L_c-L+1) \times N}$  έχουμε:

$$\mathbf{X}_{(L_c-L+1) \times N} = \mathbf{U}_{(L_c-L+1) \times (L_c-L+1)} \mathbf{\Sigma}_{(L_c-L+1) \times N} \mathbf{V}_{N \times N}^H$$

Οι πίνακες  $\mathbf{U}$  και  $\mathbf{V}$  είναι ορθογώνιοι. Οι στήλες  $\mathbf{u}_i$  του  $\mathbf{U}$  αποτελούν τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του πίνακα  $\mathbf{X}$  και προκύπτουν από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $\mathbf{X}\mathbf{X}^H$ . Ανάλογα, οι στήλες  $\mathbf{v}_i$  του  $\mathbf{V}$  αποτελούν τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του πίνακα  $\mathbf{X}$  και προκύπτουν από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $\mathbf{X}^H\mathbf{X}$ . Μάλιστα, αφού  $\text{rank}(\mathbf{X}) = P$ , η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(L_c-L+1) \times N} &= \left( \mathbf{U}_{1(L_c-L+1) \times P} \quad \mathbf{U}_{2(L_c-L+1) \times (L_c-L+1-P)} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{P \times P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^H_{P \times N} \\ \mathbf{V}_2^H_{(N-P) \times N} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{X} &= \mathbf{U}_1 \left( \tilde{\mathbf{\Sigma}} \quad \mathbf{V}_1^H \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_{(L_c-L+1) \times N} = \mathbf{U}_{1(L_c-L+1) \times P} \mathbf{B}_{P \times N}$$

Οι στήλες του  $\mathbf{U}_1$  αντιστοιχούν στις μη μηδενικές και διαφορετικές ιδιάζουσες τιμές του  $\mathbf{X}$ , οπότε είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι η στήλη  $i = 1, \dots, P$  του πίνακα  $\mathbf{X}$  αποτελεί γραμμικό συνδιασμό των  $P$  γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του  $\mathbf{U}_1$  με συντελεστές τα στοιχεία της  $i$  στήλης του  $\mathbf{B}$ . Για το λόγο αυτό οι στήλες του  $\mathbf{U}_1$  αποτελούν μία βάση του υποχώρου σήματος.

Λόγω της ορθογωνιότητας του  $\mathbf{U}$  είναι  $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{U}_2$ . Δηλαδή το  $\mathbf{U}_2$  είναι κάθετο στη βάση  $\mathbf{U}_1$  του υποχώρου σήματος, άρα θα είναι κάθετο και στο  $\mathbf{W}$  που αποτελεί επίσης μία διαφορετική βάση του υποχώρου σήματος:  $\mathbf{U}_2 \perp \mathbf{W}$ . Συνεπώς, το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποχώρου σήματος αποτελεί τον υποχώρο θορύβου (*noise subspace*) και παράγεται από τις στήλες του  $\mathbf{U}_2$ . Μάλιστα, επειδή οι στήλες του  $\mathbf{U}_2$  αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του  $\mathbf{X}$ , δεν θα αποτελούν τη μοναδική του βάση.

Εχμεταλλευόμενοι λοιπόν την καθετότητα των δύο υποχώρων έχουμε:

$$\mathbf{U}_2^H \bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{0} \quad , \bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i$$

$$\Rightarrow \mathbf{U}_2^H \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i = \mathbf{0} \quad , i = 1, \dots, P$$

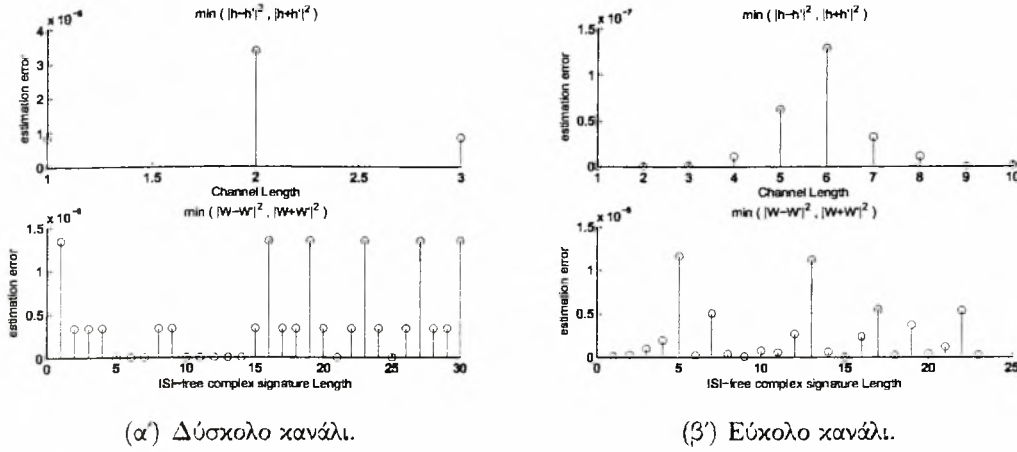
Το παραπάνω σύστημα αποτελείται από  $(L_c - L + 1) - P$  εξισώσεις και  $L$  αγνώστους  $h_i(1) \dots h_i(L)$  οι οποίοι υπολογίζονται για κάθε έναν από τους  $i = 1, \dots, P$  χρήστες. Εκτιμώντας το διάνυσμα του καναλιού  $\mathbf{h}_i$  του χρήστη  $i$  μπορούμε στη συνέχεια να ανακτήσουμε την υπογραφή του  $\bar{\mathbf{w}}_i$ . Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι προκειμένου το σύστημα να έχει λύση θα πρέπει:

$$(L_c - L + 1) - P \geq L \Rightarrow P \leq L_c - 2L + 1$$

Τελειώνουμε την ανάλυση προσομοιώνοντας<sup>1</sup> την διαδικασία για ένα CDMA σύστημα με διαμόρφωση BPSK,  $P = 10$  χρήστες, κέρδος αναπτύγματος  $L_c = 32$ ,  $N = 80$  τα λαμβανόμενα διανυσμάτα δεδομένων στο χρήστη ενδιαφέροντος, στο δύσκολο και στο εύκολο κανάλι, χωρίς την παρουσία θορύβου. Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση είναι πάρα πολύ κοντά στην πραγματικότητα, αν εξαιρέσουμε το σφάλμα που γίνεται στο πρόσημο, το οποίο και δεν μπορούμε να αποφύγουμε.

<sup>1</sup>Ο κώδικας βρίσκεται στο Παράρτημα Α (t1.m)





Σχήμα 2.1: Εκτίμηση καναλιού και σύνθετης υπογραφής με απουσία θορύβου

## Παρουσία Θορύβου

Σε ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι υπάρχουν διάφορες πηγές θορύβου που μπορούν να προκαλούν υποβάθμιση στο λαμβανόμενο σήμα. Θεωρήστε για παράδειγμα το θόρυβο που εισάγεται από την κεραία του δέκτη ή το θερμικό θόρυβο και το θόρυβο βολής που δημιουργούνται στο στάδιο προ-ενίσχυσης του δέκτη. Στην είσοδο του δέκτη, όλες αυτές οι πηγές θορύβου μοντελοποιούνται ως ένα σήμα προσθετικού λευκού Γκαουσιανού θορύβου, που είναι στατιστικά ανεξάρτητο από το επιθυμητό. Η φασματική πυκνότητα ισχύος του λευκού προσθετικού θορύβου μπορεί να ληφθεί από την ανάλυση διατάξεων, ή από πειραματικές μετρήσεις. Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε την παράμετρο του θορύβου στα λαμβανόμενα δεδομένα και θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά της μεθόδου ανάλυσης υποχώρων την οποία αναλύσαμε προηγουμένως.

Θα θεωρήσουμε τόσο το σήμα προς το χρήστη ενδιαφέροντος  $i$ , όσο και τον θόρυβο που προστίθεται σε αυτό ως στάσιμες υπό την ευρεία έννοια (*wide sense stationary*) στοχαστικές διαδικασίες, όπου μόνο οι δύο πρώτες ροπές τους, δηλαδή η μέση τιμή και η αυτοσυσχέτιση είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης  $\mathbf{R}_{xx} \in \mathcal{R}^{m \times m}$  μιας στάσιμης υπό την ευρεία έννοια στοχαστικής διαδικασίας  $\mathbf{x}$  ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{R}_{xx} = E \{ (\mathbf{x} - \mu)(\mathbf{x} - \mu)^T \} \quad ,$$

όπου  $\mu$  το διάνυσμα μέσης τιμής της διαδικασίας. Για διαδικασίες μηδενικής μέσης τιμής, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx} &= E \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^T \} \\ \Rightarrow \mathbf{R}_{xx} &= E \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \mathbf{R}_{xx} = E \left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_m \\ x_1x_2 & x_2^2 & & x_2x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_mx_1 & x_mx_2 & \dots & x_m^2 \end{pmatrix} \right\}$$

Το στοιχείο  $\mathbf{R}_{xx}(1,1)$  είναι το  $E\{x_1^2\}$  το οποίο είναι ίσο με τη διασπορά  $\sigma^2$  του πρώτου στοιχείου όλων των πιθανών διανυσμάτων  $\mathbf{x}$ . Επειδή η διαδικασία είναι στάσιμη υπό την ευρεία έννοια είναι:

$$\mathbf{R}_{xx}(1,1) = \mathbf{R}_{xx}(2,2) = \dots = \mathbf{R}_{xx}(m,m) = \sigma^2$$

οπότε η κύρια διαγώνιος του  $\mathbf{R}_{xx}$  είναι ίση με τη διασπορά της διαδικασίας. Το στοιχείο  $\mathbf{R}_{xx}(1,2)$  είναι το  $E\{x_1x_2\}$  και αποτελεί την ετεροσυσχέτιση του πρώτου στοιχείου του διανύσματος  $\mathbf{x}$  με το δεύτερο. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία:

$$\mathbf{R}_{xx}(1,2) = \mathbf{R}_{xx}(2,3) = \dots = \mathbf{R}_{xx}(m-1,m)$$

αποτελούν την ετεροσυσχέτιση της διαδικασίας με μία καθυστερημένη κατά ένα δείγμα έκδοσή της. Μάλιστα, επειδή είναι στάσιμη υπό την ευρεία έννοια θα είναι:

$$\mathbf{R}_{xx}(1,2) = \mathbf{R}_{xx}(2,3) = \dots = \mathbf{R}_{xx}(m-1,m) =$$

$$\mathbf{R}_{xx}(2,1) = \mathbf{R}_{xx}(3,2) = \dots = \mathbf{R}_{xx}(m,m-1) \quad ,$$

πράγμα που σημαίνει ότι τα στοιχεία της πρώτης άνω και κάτω διαγωνίου είναι ίσα. Με το ίδιο σκεπτικό τα στοιχεία των  $j$  άνω και κάτω διαγωνίων είναι ίσα και εκφράζουν την ετεροσυσχέτιση της διαδικασίας με μία καθυστερημένη έκδοση του εαυτού της κατά  $j$  δείγματα.

Σε μία διαδικασία όπου τα γειτονικά δείγματα συσχετίζονται, άρα αυτή μεταβάλλεται αργά με το χρόνο, οι διαγώνιες του  $\mathbf{R}_{xx}$  ελαττώνονται σταδιακά όσο απομακρύνονται από την κύρια διαγώνιο. Σε μία διαδικασία όπου τα γειτονικά δείγματα δεν συσχετίζονται, άρα αυτή μεταβάλλεται γρήγορα με το χρόνο, οι διαγώνιες του  $\mathbf{R}_{xx}$  ελαττώνονται πολύ γρήγορα όσο απομακρύνονται από την κύρια διαγώνιο. Παράδειγμα τέτοιας διαδικασίας αποτελεί ο λευκός θόρυβος όπου κάθε δείγμα συσχετίζεται μόνο με τον εαυτό του. Όλα είναι τυχαία και ασυσχέτιστα και ο πίνακας αυτοσυσχέτισης μιας τέτοιας διαδικασίας θα έχει την εξής μορφή:

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & & \\ & \sigma^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}_{m \times m}$$

Όσον αφορά τις ιδιότητες του πίνακα αυτοσυσχέτισης, είναι *Hermitian*, *Toeplitz* και θετικά ημι-ορισμένος. Κλείνοντας την αναφορά στον πίνακα αυτοσυσχέτισης εξετάζουμε τις ιδιοτιμές του. Έστω  $\det[\mathbf{R}_{xx}]$  η ορίζουσα του. Οι ιδιοτιμές θα αποτελούν τις λύσεις  $\lambda_i, i = 1 \dots N$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης τάξης  $N$ :

$$\det[\mathbf{R}_{xx} - \lambda \mathbf{I}] = 0$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στήλης  $\mathbf{u}_i$  θα ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{u}_i = \lambda \mathbf{u}_i$$

Για μια διαδικασία λευκού θορύβου συνεπάγεται ότι όλες οι ιδιοτιμές του  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_N = \sigma^2$  είναι ίσες το  $\mathbf{u}_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  μπορεί να είναι κάθε αυθαίρετο διάνυσμα. Αν οι ιδιοτιμές του είναι διακριτές, τότε τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και δημιουργούν μία βάση στον  $\mathcal{R}^N$ .

Επιστρέφουμε τώρα πίσω στο πρόβλημα μας. Το  $n$ -στό διάνυσμα δεδομένων που λαμβάνεται στον δέκτη, δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι είναι:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_n &= \sum_{i=1}^P \mathbf{x}_i(n) = \sum_{i=1}^P \bar{\mathbf{w}}_i s_i(n) \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_n &= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{w}}_1 & \bar{\mathbf{w}}_2 & \dots & \bar{\mathbf{w}}_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \\ \vdots \\ s_P(n) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_n &= \tilde{\mathbf{w}}_{(L_c-L+1) \times P} \mathbf{s}_n\end{aligned}$$

Έστω  $\mathbf{n}_{(L_c-L+1) \times 1}$  το διάνυσμα θορύβου, το οποίο και προστίθεται στα δεδομένα  $\tilde{\mathbf{x}}_n$ . Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης λοιπόν του λαμβανόμενου διανύσματος  $\tilde{\mathbf{x}}_n + \mathbf{n}$  στο δέκτη, ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathcal{E}[(\tilde{\mathbf{x}}_n + \mathbf{n})(\tilde{\mathbf{x}}_n + \mathbf{n})^H] = \mathcal{E}[(\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{s}_n + \mathbf{n})(\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{s}_n + \mathbf{n})^H] \\ \Rightarrow \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{w}}\mathcal{E}[\mathbf{s}_n\mathbf{s}_n^H]\tilde{\mathbf{w}}^H + \tilde{\mathbf{w}}\mathcal{E}[\mathbf{s}_n\mathbf{n}^H]\tilde{\mathbf{w}}^H + \tilde{\mathbf{w}}\mathcal{E}[\mathbf{n}\mathbf{s}_n^H]\tilde{\mathbf{w}}^H + \tilde{\mathbf{w}}\mathcal{E}[\mathbf{n}\mathbf{n}^H]\tilde{\mathbf{w}}^H\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε ότι τα δείγματα θορύβου με τα σύμβολα είναι *ασυσχέτιστα* τότε  $\mathcal{E}[\mathbf{s}_n\mathbf{n}^H] = \mathcal{E}[\mathbf{n}\mathbf{s}_n^H] = 0$  και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{R}_{ss}\tilde{\mathbf{w}}^H + \mathbf{R}_{nn}$$

Υποθέτοντας ότι τα δείγματα της  $\mathbf{s}_n$  είναι μεταξύ τους *ανεξάρτητα*, άρα και *ασυσχέτιστα* και ότι ακολουθούν την ίδια κατανομή, ο πίνακας  $\mathbf{R}_{ss}$  έχει ως εξής:

$$\mathbf{R}_{ss} = \begin{pmatrix} \sigma_{s_1}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{s_n}^2 \end{pmatrix}_{P \times P}$$

Ανάλογα για τον πίνακα αυτοσυσχέτισης του θορύβου, έχουμε:

$$\mathbf{R}_{nn} = \begin{pmatrix} \sigma_n^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}_{(L_c-L+1) \times (L_c-L+1)} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$$

Τελικά ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του  $n$ -στού διανύσματος που λαμβάνεται παρουσία θορύβου θα είναι:

$$\mathbf{R}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \tilde{\mathbf{w}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_{s_1}^2 + \sigma_n^2 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & \sigma_{s_n}^2 + \sigma_n^2 & & & \\ & 0 & & \sigma_n^2 & & 0 \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & 0 & & \sigma_n^2 \end{array} \right) \tilde{\mathbf{w}}^H$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \left( \mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 \right) \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_{s_1}^2 + \sigma_n^2 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & \sigma_{s_n}^2 + \sigma_n^2 & & & \\ & 0 & & \sigma_n^2 & & 0 \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & 0 & & \sigma_n^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^H \\ \mathbf{V}_2^H \end{pmatrix}$$

Επομένως μπορούμε να κάνουμε ανάλυση ιδιοτιμών του πίνακα  $\mathbf{R}_{\tilde{x}\tilde{x}}$  προκειμένου να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{V}_2^H$  που αντιστοιχούν στις μικρότερες ιδιοτιμές  $\sigma_n^2$  και αποτελούν μία βάση του υποχώρου θορύβου. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το διάνυσμα καναλιού  $\mathbf{h}_i$  για κάθε χρήστη  $i = 1, \dots, P$  όπως πριν:

$$\mathbf{V}_2^H \tilde{\mathbf{w}}_i = 0 \quad , \tilde{\mathbf{w}}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}_2^H \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i = 0 \quad , i = 1, \dots, P \quad (2.1)$$

Στην πράξη όμως αυτό που έχουμε είναι μία εκτίμηση του  $\mathbf{R}_{\tilde{x}\tilde{x}}$ , με βάση έναν πεπερασμένο αριθμό λαμβανόμενων διανυσμάτων  $\tilde{\mathbf{x}}_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ :

$$\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_n \tilde{\mathbf{x}}_n^H = \frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{X}^H,$$

με  $\mathbf{X} = \left( \tilde{\mathbf{x}}_1 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{x}}_N \right)$ . Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ανιχνεύσουμε μικρές αλλαγές στον κανονικό πίνακα αυτοσυσχέτισης με την πάροδο του χρόνου, με την προϋπόθεση ότι η αλλαγή στη διαδικασία είναι μικρή πάνω στο διάστημα των  $N$  δειγμάτων. Επίσης, πλέον η μικρότερη ιδιοτιμή δεν είναι ίση με μηδέν, αλλά με  $\sigma_n^2$ . Συνεπώς η (2.1) γίνεται:

$$\mathbf{V}_2^H \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i \simeq 0 \Rightarrow (\mathbf{V}_2^H \mathbf{C}_i)^H \mathbf{V}_2^H \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i \simeq 0$$

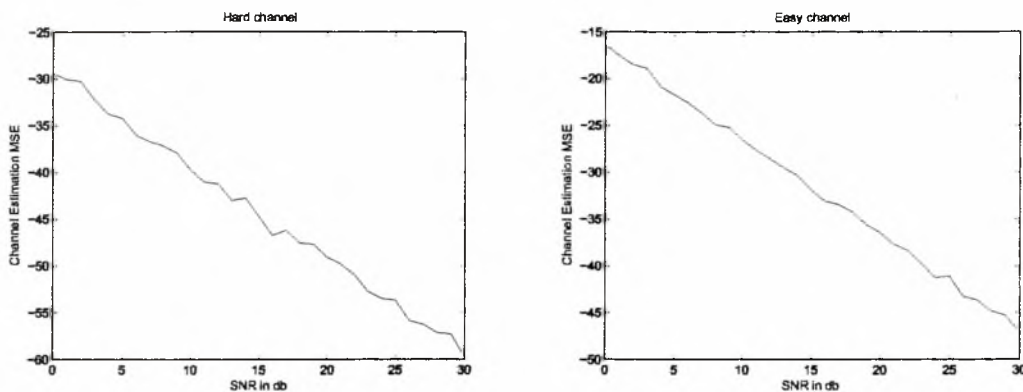
$$\Rightarrow (\mathbf{C}_i^H \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2^H \mathbf{C}_i) \mathbf{h}_i \simeq 0$$

και το  $\mathbf{h}_i$  θα αποτελεί το ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στη μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα  $(\mathbf{C}_i^H \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2^H \mathbf{C}_i)$ .

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης<sup>2</sup> της παραπάνω διαδικασίας στο ίδιο με πριν CDMA σύστημα 10 χρηστών, παρουσία θορύβου αυτή τη φορά με το σηματοθορυβικό λόγο (SNR) στο δέκτη να αυξάνει από 0 σε 30 db. Η ισχύς του σφάλματος εκτίμησης ορίζεται ως:

$$MSE = E \left\{ \min \left( \left\| \frac{\hat{h}}{\|\hat{h}\|} - \frac{h}{\|h\|} \right\|^2, \left\| \frac{\hat{h}}{\|\hat{h}\|} + \frac{h}{\|h\|} \right\|^2 \right) \right\} ,$$

όπου το  $E\{\cdot\}$  εκφράζει το στοχαστικό μέσον όρο, ο οποίος προσεγγίζεται εφαρμόζοντας αριθμητικό μέσο όρο σε 100 ανεξάρτητες προσομοιώσεις. Τέλος στα σχήματα που ακολουθούν, το MSE παρουσιάζεται σε db, δηλαδή  $10 \log_{10}(MSE)$ . Και στις δύο περιπτώσεις καθώς αυξάνεται το SNR, το MSE ελαττώνεται.



(α') Δύσκολο κανάλι.

(β') Εύκολο κανάλι.

Σχήμα 2.2: MSE εκτίμησης καναλιού σε συνάρτηση με το SNR

<sup>2</sup>ο κώδικας βρίσκεται Παράρτημα Α (t2.m)

## Κεφάλαιο 3

# Από Κοινού Εκτίμηση Καναλιού και Σφάλματος Φέρουσας

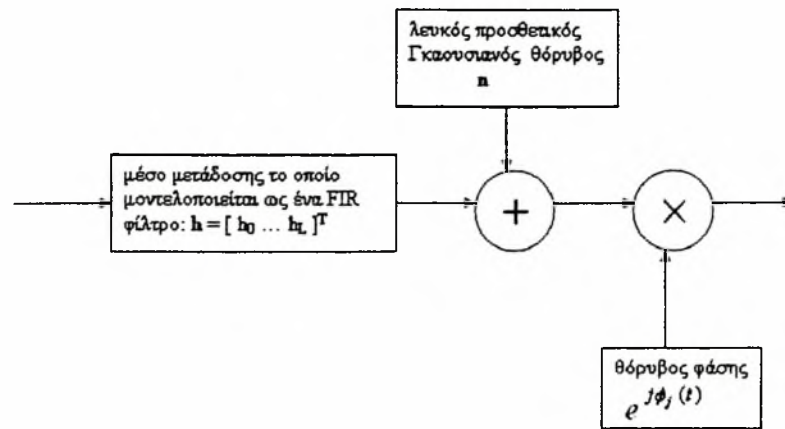
### Προσδιορισμός του σφάλματος φέρουσας

Οι αποδιαμορφωτές που χρησιμοποιούνται στους δέκτες κατηγοριοποιούνται είτε ως σύμφωνοι είτε ως ασύμφωνοι. Εξαρτάται από το αν χρησιμοποιούν ή όχι ένα σήμα φορέα, το οποίο ιδανικά πρέπει να έχει την ίδια φάση και την ίδια συχνότητα με τον φορέα του πομπού, για να μπορέσει ο δέκτης να αποδιαμορφώσει το λαμβανόμενο σήμα. Συνήθως τόσο η φάση όσο και η συχνότητα ανακτώνται από το λαμβανόμενο σήμα χρησιμοποιώντας ένα κύκλωμα βρόχου κλειδωμένης φάσης (*phase locked loop, PLL*), το οποίο χρησιμοποιεί έναν τοπικό ταλαντωτή. Ο ανακτώμενος φορέας μπορεί να διαφέρει από τον φορέα του πομπού λόγω του θορύβου φάσης που μπορεί να οφείλεται π.χ. σε ολίσθηση συχνότητας του ταλαντωτή και λόγω των δυναμικών χαρακτηριστικών και της μεταβατικής συμπεριφοράς του βρόχου κλειδωμένης φάσης.

Ο ανακτώμενος φορέας εκφράζεται ως:

$$u(t) = V_o[1 + a(t)] \cos(\omega_o t + \phi_j(t) + \frac{dt^2}{2}) \quad ,$$

όπου το  $d$  (μακροπρόθεσμη ολίσθηση) αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα λόγω γήρανσης του ταλαντωτή, το  $a(t)$  είναι ο θόρυβος πλάτους και το  $\phi_j(t)$  προσδιορίζει το θόρυβο φάσης. Συχνά ο θόρυβος πλάτους καθώς και το αποτέλεσμα γήρανσης του ταλαντωτή, μπορούν να αγνοηθούν. Ο θόρυβος φάσης συνήθως εισάγεται στο μοντέλο ενός συστήματος μετάδοσης ως εξής:



Σχήμα 3.1: Ισοδύναμο μοντέλο καναλιού βασικής ζώνης μετάδοσης

Ο θόρυβος φάσης ή σφάλμα φέρουσας  $\phi_j(t)$ , όπως θα τον αποκαλούμε στη συνέχεια, αποτελείται από αιτιοκρατικές συνιστώσες και τυχαίο θόρυβο. Για παράδειγμα, μεταβολές της θερμοκρασίας, της τάσης τροφοδοσίας και της εμπίδησης εξόδου του ταλαντωτή είναι μερικές αιτιοκρατικές συνιστώσες.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε το σφάλμα φέρουσας στο λαμβανόμενο CDMA σήμα και θα κάνουμε από κοινού εκτίμηση του με το κανάλι (*joint channel and carrier offset estimation*). Τώρα θα θεωρήσουμε ότι το σήμα που λαμβάνεται στον δέκτη από ένα χρήστη έχει ως εξής:

$$y(t) = \sum_{l=1}^{L_d} a_l x(t - \tau_l) e^{j\omega(t - \tau_l)} \quad , \quad (3.1)$$

όπου  $L_d$  ο αριθμός των μονοπατιών,  $a_l$  και  $\tau_l$  η εξασθένιση και η καθυστέρηση αντίστοιχα που εισάγεται από το μονοπάτι  $l$ ,  $x(t)$  το CDMA σήμα βασικής ζώνης του χρήστη και  $\omega$  το υπόλοιπο φέρουσας λόγω του μη καλού συγχρονισμού μεταξύ πομπού (σταθμός βάσης) και δέκτη (κινητό του χρήστη).

Για την υπογραφή και το σήμα βασικής ζώνης του χρήστη, όπως δείξαμε στο **Κεφάλαιο 1**, έχουμε αντίστοιχα:

$$w(t) = \sum_{k=1}^{L_c} c_k p(t - kT_c) \quad (3.2)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n w(n - T_s) \quad (3.3)$$

Με βάση τις (3.2) και (3.3) η (3.1) γίνεται:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{L_c} \sum_{l=1}^{L_d} a_l s_n c_k p(t - \tau_l - nT_s - kT_c) e^{j\omega(t - \tau_l)} \quad (3.4)$$

Θέτωνατας:

$$h(t) = \sum_{l=1}^{L_d} a_l p(t - \tau_l) e^{-j\omega\tau_l}$$

η (3.4) γίνεται :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j\omega t} \sum_{k=1}^{L_c} c_k h(t - nT_s - kT_c)$$

Δειγματοληπτούμε το  $y(t)$  με ρυθμό δειγματοληψίας  $R_c = \frac{1}{T_c}$  (chip rate), λαμβάνοντας από κάθε σύμβολο  $L_c$  δείγματα. Τα δείγματα που προκύπτουν από τη δειγματοληψία του  $n$ -οστού συμβόλου είναι :

$$y(nT_s + iT_c) = s_n e^{j\omega(nT_s + iT_c)} \sum_{k=1}^{L_c} c_k h(nT_s + iT_c - nT_s - kT_c)$$

$$\Rightarrow y(nL_c T_c + iT_c) = s_n e^{j\omega n T_s} \sum_{k=1}^{L_c} c_k h((i - k)T_c) e^{j\omega i T_c}$$

$$\Rightarrow y(nL_c + i) = s_n e^{jL_c \phi n} \sum_{k=1}^L h_k c_{i-k+1} e^{j\phi i}$$

$$\Rightarrow y(nL_c + i) = s_n e^{jL_c \phi n} \sum_{k=1}^L h_k c_{i-k+1} e^{j\phi i}$$

με  $\phi = \omega T_c$  και  $T_s = L_c T_c$ . Για τα δείγματα  $w_i, i = L, \dots, L_c$  της σύνθετης υπογραφής του χρήστη που μένουν ανεπηρέαστα από την διασυμβολική παρεμβολή είναι:

$$w_i = \sum_{k=1}^L h_k c(i - k + 1) e^{j\phi i}, i = L, \dots, L_c$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_L \\ \vdots \\ w_{L_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{jL\phi} & & & \\ & e^{j(L+1)\phi} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{jL_c\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_L & \dots & c_1 \\ c_{L+1} & \dots & c_2 \\ \vdots & & \vdots \\ c_{L_c} & \dots & c_{L_c-L+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_L \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{Z}_{(L_c-L+1) \times (L_c-L+1)} \mathbf{C}_{(L_c-L+1) \times L} \mathbf{h}_{L \times 1}$$

Τον πίνακα  $\mathbf{Z}$  μπορούμε να τον γράψουμε ως εξής:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} e^{j[\phi+(L-1)\phi]} & & & \\ & e^{j[2\phi+(L-1)\phi]} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{j[(L_c-L+1)\phi+(L-1)\phi]} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} e^{j[\phi+\theta]} & & & \\ & e^{j[2\phi+\theta]} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{j[(L_c-L+1)\phi+\theta]} \end{pmatrix} = e^{j\theta} \begin{pmatrix} e^{j\phi} & & & \\ & e^{j2\phi} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{j(L_c-L+1)\phi} \end{pmatrix}$$



Τα  $L_c - L + 1$  δείγματα λοιπόν από το  $n$ -οστό σύμβολο που παραμένουν ανεπηρέαστα από τη διασυμβολική παρεμβολή είναι :

$$\begin{pmatrix} y(nL_c + L) \\ y(nL_c + L + 1) \\ \vdots \\ y(nL_c + L_c) \end{pmatrix} = s_n e^{jL_c \phi_n} \begin{pmatrix} w_L \\ w_{L+1} \\ \vdots \\ w_{L_c} \end{pmatrix} = s_n e^{jL_c \phi_n} \bar{\mathbf{w}}$$

Έστω τώρα ότι έχουμε  $P$  χρήστες. Για κάθε χρήστη  $i$ , το διάνυσμα με τα δείγματα του  $n$ -οστού συμβόλου που είναι απαλλαγμένα από τη διασυμβολική παρεμβολή είναι το εξής:

$$\mathbf{x}_i(n) = \begin{pmatrix} w_i(L) \\ \vdots \\ w_i(L_c) \end{pmatrix} s_i(n) e^{jnL_c \phi_i}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_i(n) = \bar{\mathbf{w}}_i s_i(n) e^{jnL_c \phi_i}$$

με τον πίνακα  $\bar{\mathbf{w}}_i$  για τον χρήστη  $i$  να είναι:

$$\begin{pmatrix} w_i(L) \\ w_i(L+1) \\ \vdots \\ w_i(L_c) \end{pmatrix} =$$

$$e^{j\theta_i} \begin{pmatrix} e^{j\phi_i} & & & \\ & e^{j2\phi_i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{j(L_c-L+1)\phi_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i(L) & c_i(L-1) & \dots & c_i(1) \\ c_i(L+1) & c_i(L) & \dots & c_i(2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_i(L_c) & c_i(L_c-1) & \dots & c_i(L_c-L+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_i(1) \\ h_i(2) \\ \vdots \\ h_i(L) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i$$

Το διάνυσμα δεδομένων που λαμβάνει ο δέκτης θα αποτελεί το άθροισμα των διανυσμάτων  $\mathbf{x}_i(n)$ ,  $i = 1 \dots P$ .

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = \sum_{i=1}^P \mathbf{x}_i(n) = \sum_{i=1}^P \bar{\mathbf{w}}_i s_i(n) e^{jnL_c \phi_i}$$

Το  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  λοιπόν θα αποτελείται από τα  $L_c - L + 1$  δείγματα του  $n$ -οστού συμβόλου, το οποίο και σχηματίζεται από την υπέρθεση των  $n$ -οστών συμβόλων των  $P$  χρηστών του συστήματος. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι έχουμε  $N$  διανύσματα  $\tilde{\mathbf{x}}_n$ ,  $n = 1 \dots N$  τα οποία προέρχονται από τη δειγματοληψία  $N$  συμβόλων που λαμβάνονται στο δέκτη.



Τα  $L_c - L + 1$  δείγματα λοιπόν από το  $n$ -οστό σύμβολο που παραμένουν ανεπηρέαστα από τη διασυμβολική παρεμβολή είναι :

$$\begin{pmatrix} y(nL_c + L) \\ y(nL_c + L + 1) \\ \vdots \\ y(nL_c + L_c) \end{pmatrix} = s_n e^{jL_c \phi n} \begin{pmatrix} w_L \\ w_{L+1} \\ \vdots \\ w_{L_c} \end{pmatrix} = s_n e^{jL_c \phi n} \bar{\mathbf{w}}$$

Έστω τώρα ότι έχουμε  $P$  χρήστες. Αν θεωρήσουμε Για κάθε χρήστη  $i$ , το διάνυσμα με τα δείγματα του  $n$ -οστού συμβόλου που είναι απαλλαγμένα από τη διασυμβολική παρεμβολή είναι το εξής:

$$\mathbf{x}_i(n) = \begin{pmatrix} w_i(L) \\ \vdots \\ w_i(L_c) \end{pmatrix} s_i(n) e^{jnL_c \phi_i}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_i(n) = \bar{\mathbf{w}}_i s_i(n) e^{jnL_c \phi_i}$$

με τον πίνακα  $\bar{\mathbf{w}}_i$  για τον χρήστη  $i$  να είναι:

$$\begin{pmatrix} w_i(L) \\ w_i(L+1) \\ \vdots \\ w_i(L_c) \end{pmatrix} =$$

$$e^{j\theta_i} \begin{pmatrix} e^{j\phi_i} & & & \\ & e^{j2\phi_i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{j(L_c-L+1)\phi_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i(L) & c_i(L-1) & \dots & c_i(1) \\ c_i(L+1) & c_i(L) & \dots & c_i(2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_i(L_c) & c_i(L_c-1) & \dots & c_i(L_c-L+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_i(1) \\ h_i(2) \\ \vdots \\ h_i(L) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i$$

Επισημάνουμε ότι στην περίπτωση που θεωρούμε ως δέκτη το κινητό του χρήστη ενδιαφέροντος στο σφάλμα φέρουσας είναι κοινό παντού, οπότε αντί για  $\phi_i$  θα έχουμε  $\phi$ .

Το διάνυσμα δεδομένων που λαμβάνει ο δέκτης θα αποτελεί το άθροισμα των διανυσμάτων  $\mathbf{x}_i(n)$ ,  $i = 1 \dots P$ .

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = \sum_{i=1}^P \mathbf{x}_i(n) = \sum_{i=1}^P \bar{\mathbf{w}}_i s_i(n) e^{jnL_c \phi_i}$$

Το  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  λοιπόν θα αποτελείται από τα  $L_c - L + 1$  δείγματα του  $n$ -οστού συμβόλου, το οποίο και

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow e^{-j\theta} e^{j\theta} (\mathbf{P}_1 z + \mathbf{P}_2 z^2 + \dots + \mathbf{P}_K z^K) \mathbf{h} \simeq \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \left( \sum_{k=1}^K \mathbf{P}_k z^k \right)_{(L_c-L) \times L} \mathbf{h}_{L \times 1} \simeq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Q}(z) \mathbf{h} \simeq \mathbf{0} \quad (3.6) \\
&\Rightarrow (\mathbf{Q}^H(z) \mathbf{Q}(z)) \mathbf{h} \simeq \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \mathbf{Q}_{L \times L} \mathbf{h} \simeq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι καταλήξαμε σε ένα πολυωνυμικό πρόβλημα ιδιοτιμών. Όταν  $z = z_o = e^{j\phi_o}$ , όπου  $\phi_o$  είναι το πραγματικό σφάλμα φέρουσας, ο πίνακας  $\mathbf{Q}(z_o)$  θα πρέπει να μην είναι αντιστρέψιμος, προκειμένου το διάνυσμα καναλιού  $\mathbf{h}$  να ορίζεται μονοσήμαντα. Συνεπώς το πραγματικό σφάλμα φέρουσας θα αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή (η οποία θα είναι πολύ κοντά στο μηδέν) του πίνακα  $\mathbf{Q}(z_o)$  και το διάνυσμα καναλιού θα αποτελεί το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Μάλιστα επειδή το  $z_o$  είναι μοναδικό θα είναι:

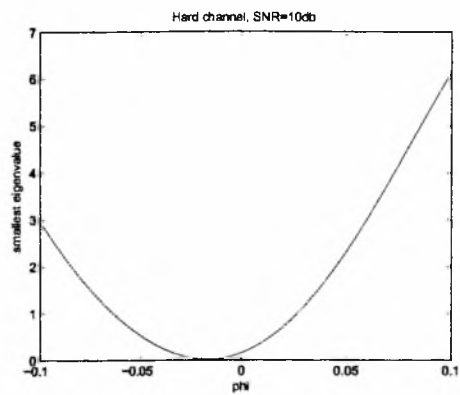
- για  $z = z_o$  η μικρότερη ιδιοτιμή προσεγγίζει το μηδέν
- για  $z \neq z_o$  η μικρότερη ιδιοτιμή είναι διάφορη του μηδενός

Συνοψίζοντας, τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής:

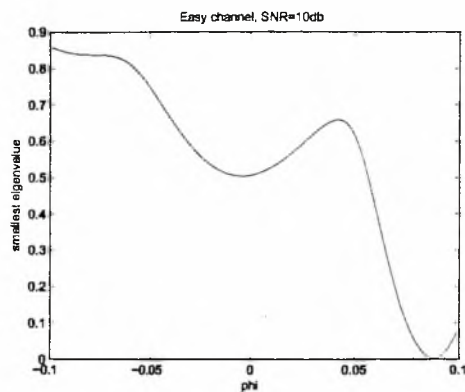
1. SVD ανάλυση στον πίνακα αυτοσυσχέτισης προκειμένου με πάρουμε τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{V}_2^H$  που αντιστοιχούν στις μικρότερες ιδιοτιμές και αποτελούν μία βάση του υποχώρου θορύβου.
2. δειγματοληψία του  $\phi$  στο διάστημα  $[-0.1 \ 0.1]$ , όπου θεωρούμε ότι κυμαίνεται και για κάθε τιμή του κρατάμε την μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathbf{Q}$ . Η εκτίμηση του σφάλματος φέρουσας θα είναι το  $\hat{\phi}$  εκείνο που δίνει τη μικρότερη ιδιοτιμή και η εκτίμηση του καναλιού θα είναι το ιδιοδιάνυσμα που της αντιστοιχεί<sup>1</sup>.

$\phi : -0.0163$ $\hat{\phi} : -0.0165$ $h = 0.4070 \ 0.8150 \ 0.4070$ $\hat{h} = -0.4123 \ -0.8118 \ -0.4131$
---

<sup>1</sup>ο κώδικας βρίσκεται στο Παράρτημα Α (method1.m)

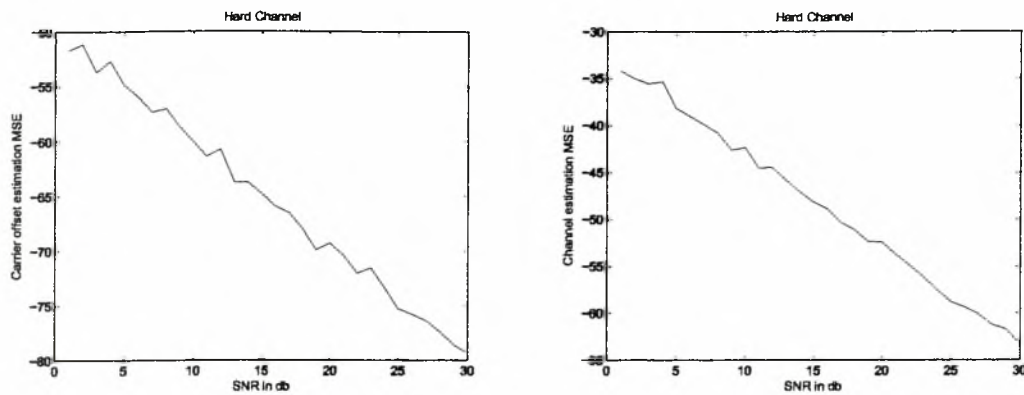


Σχήμα 3.2: Οι μικρότερες ιδιοτιμές σε συνάρτηση με τα δείγματα  $\hat{\phi}$  - Δύσκολο κανάλι



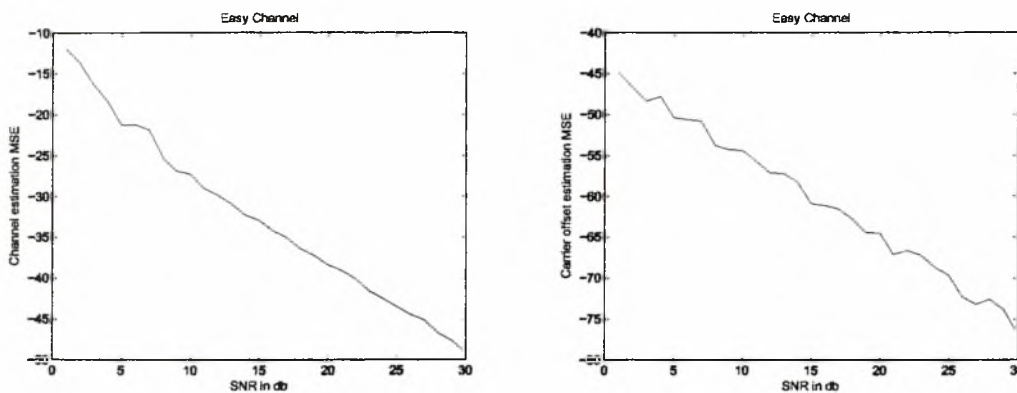
Σχήμα 3.3: Οι μικρότερες ιδιοτιμές σε συνάρτηση με τα δείγματα  $\hat{\phi}$  - Εύκολο κανάλι

$\phi : 0.0877$	
$\hat{\phi} : 0.0880$	
$h = 0.0400$	$\hat{h} = -0.0483$
-0.0500	0.0306
0.0700	-0.0735
-0.2100	0.2106
-0.5000	0.4615
0.7200	-0.7049
0.3600	-0.3628
0.2100	-0.2087
0.0300	-0.0215
0.0700	-0.0816



(α')  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συνάρτηση με το  $SNR$ . (β')  $MSE$  εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συνάρτηση με το  $SNR$ .

Σχήμα 3.4: Δύσκολο κανάλι



(α')  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συνάρτηση με το  $SNR$ . (β')  $MSE$  εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συνάρτηση με το  $SNR$ .

Σχήμα 3.5: Εύκολο κανάλι

Στις παραπάνω γραφικές παραστάσεις, παρουσιάζεται το  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας και καναλιού σε συνάρτηση με το  $SNR$  για τα δύο κανάλια. Στο δύσκολο κανάλι το  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας παίρνει μικρότερες τιμές καθώς αυξάνει το  $SNR$  σε σχέση με το εύκολο κανάλι, ενώ το αντίθετο συμβαίνει με το  $MSE$  εκτίμησης καναλιού. Επομένως, στο εύκολο κανάλι έχουμε καλύτερη εκτίμηση του διανύσματος καναλιού, ενώ στο δύσκολο κανάλι έχουμε καλύτερη εκτίμηση του σφάλματος φέρουσας.

### Αναγωγή σε Γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών

Ένας διαφορετικός τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι να ανάγουμε το πολυωνυμικό πρόβλημα ιδιοτιμών σε ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών. Από την (3.6) λοιπόν έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & (P_K z^K + P_{K-1} z^{K-1} + \dots + P_2 z^2 + P_1 z)h \simeq 0 \\
 \Rightarrow & P_K z \underbrace{z^{K-1}h}_{x_1 L \times 1} + P_{K-1} \underbrace{z^{K-1}h}_{x_1 L \times 1} + P_{K-2} \underbrace{z^{K-2}h}_{x_2 L \times 1} + \dots + P_2 \underbrace{z^2 h}_{x_{K-2} L \times 1} + P_1 \underbrace{z h}_{x_{K-1} L \times 1} \simeq 0 \\
 \Rightarrow & P_K z x_1 + P_{K-1} x_1 + P_{K-2} x_2 + \dots + P_2 x_{K-2} + P_1 x_{K-1} \simeq 0 \\
 \Rightarrow & \left( z \begin{pmatrix} P_K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{K-1} & P_{K-2} & \dots & P_1 \\ -I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -I & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{K-1} \end{pmatrix}_{(K-1)L \times 1} \simeq 0 \\
 \Rightarrow & (zX + Y)x \simeq 0 \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Yx \simeq (-z)Xx \Rightarrow Ax \simeq \lambda Bx$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, με τον πίνακα  $zX + Y$  να έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον  $Q(z)$ . Ας εξετάσουμε τις διαστάσεις των πινάκων. Η παραπάνω εξίσωση πινάκων οδηγεί στο εξής σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} (P_K + P_{K-1})zx_1 + P_{K-2}zx_2 + \dots + P_1zx_{K-1} \simeq 0_{(L_c-L) \times 1} \\ -Ix_1 + zIx_2 \simeq 0_{L \times 1} \\ -Ix_2 + zIx_3 \simeq 0_{L \times 1} \\ \vdots \\ -Ix_{K-2} + zIx_{K-1} \simeq 0_{L \times 1} \end{cases}$$

Συνεπώς προκειμένου να ορίζονται οι πράξεις, οι διαστάσεις των πινάκων μέσα στους πίνακες  $L$  και  $X$  θα έχουν ως εξής:

$$X = \begin{pmatrix} P_{K(L_c-L) \times L} & 0_{(L_c-L) \times L} & \dots & 0_{(L_c-L) \times L} \\ 0_{L \times L} & I_{L \times L} & & 0_{L \times L} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0_{L \times L} & \dots & 0_{L \times L} & I_{L \times L} \end{pmatrix}_{[(L_c-L)+(K-2)L] \times (K-1)L}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{K}-1(L_c-L) \times L} & \mathbf{P}_{\mathbf{K}-2(L_c-L) \times L} & \cdots & \mathbf{P}_{1(L_c-L) \times L} \\ -\mathbf{I}_{L \times L} & \mathbf{0}_{L \times L} & \cdots & \mathbf{0}_{L \times L} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{L \times L} & \cdots & -\mathbf{I}_{L \times L} & \mathbf{0}_{L \times L} \end{pmatrix}_{[(L_c-L)+(K-2)L] \times (K-1)L}$$

Παρατηρούμε ότι μόνο όταν  $L_c = 2L$  οι πίνακες  $\mathbf{X}$  και  $\mathbf{Y}$  είναι τετραγωνικοί και μπορούμε να λύσουμε το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, με την εκτίμηση του σφάλματος φέρουσας να αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή και την εκτίμηση του καναλιού να προέρχεται από το αντίστοιχο το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα επιλέγοντας τα  $L$  πρώτα στοιχεία και διαιρώντας με  $-z^{K-1}$ . Διαφορετικά, από την (3.7) συνεχίζουμε ως εξής:

$$(z\mathbf{X} + \mathbf{Y})^H (z\mathbf{X} + \mathbf{Y})\mathbf{x} \simeq \mathbf{0} \Rightarrow (z^{-1}\mathbf{X}^H + \mathbf{Y}^H)(z\mathbf{X} + \mathbf{Y})\mathbf{x} \simeq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow (z^{-1}z\mathbf{X}^H\mathbf{X} + z^{-1}\mathbf{X}^H\mathbf{Y} + z\mathbf{Y}^H\mathbf{X} + \mathbf{Y}^H\mathbf{Y})\mathbf{x} \simeq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow (z^2\mathbf{Y}^H\mathbf{X} + z(\mathbf{X}^H\mathbf{X} + \mathbf{Y}^H\mathbf{Y}) + \mathbf{X}^H\mathbf{Y})\mathbf{x} \simeq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q}_{(K-1)L \times (K-1)L} \mathbf{x} \simeq \mathbf{0}$$

Η εκτίμηση γίνεται όπως και πριν, δειγματοληπτώντας το  $\phi$  στο  $[-0.1 \ 0.1]$  και επιλέγοντας το  $\hat{\phi}$  που αντιστοιχεί στην μικρότερη ιδιοτιμή του  $\mathbf{Q}$  κάθε φορά. Όμως στην περίπτωση αυτή η διάσταση του  $\mathbf{Q}$  είναι πολύ μεγάλη, πράγμα που καθιστά την SVD χρονοβόρα.

### Προσέγγιση του πίνακα $Z$ με τη βοήθεια του αναπτύγματος *Taylor*

Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος ο οποίος βασίζεται στην προσέγγιση του πίνακα  $\mathbf{Z}_i$  της (3.5) μέσω της σειράς *Taylor*. Θέτοντας  $\mathbf{D} = \text{diag}\{1, 2, \dots, K\}$  είναι:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{I} + j\phi_i \mathbf{D} + \frac{(j\phi_i)^2}{2!} \mathbf{D}^2 + \dots + \frac{(j\phi_i)^n}{n!} \mathbf{D}^n + \dots$$

Χρησιμοποιώντας τους δύο πρώτους όρους της σειράς *Taylor* η (3.5) γίνεται:

$$\mathbf{V}_2^H (\mathbf{I} + j\phi_i \mathbf{D}) \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i \simeq \mathbf{0}$$

Συνεπώς τα ζητούμενα  $\hat{\phi}_i$  και  $\hat{\mathbf{h}}_i$  είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_i, \hat{\mathbf{h}}_i &= \arg \min_{\phi_i, \mathbf{h}_i} \|\mathbf{V}_2^H (\mathbf{I} + j\phi_i \mathbf{D}) \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i\|^2 \\ \Rightarrow \hat{\phi}_i, \hat{\mathbf{h}}_i &= \arg \min_{\phi_i, \mathbf{h}_i} \left\| \underbrace{\mathbf{V}_2^H \mathbf{C}_i}_{\mathbf{A}_i} \mathbf{h}_i + j\phi_i \underbrace{\mathbf{V}_2^H \mathbf{D} \mathbf{C}_i}_{\mathbf{B}_i} \mathbf{h}_i \right\|^2 \\ \Rightarrow \hat{\phi}_i, \hat{\mathbf{h}}_i &= \arg \min_{\phi_i, \mathbf{h}_i} J(\phi_i, \mathbf{h}_i) \end{aligned}$$

Για τη συνάρτηση κόστους  $J(\phi_i, \mathbf{h}_i)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} J(\phi_i, \mathbf{h}_i) &= (\mathbf{A}_i \mathbf{h}_i + j\phi_i \mathbf{B}_i \mathbf{h}_i)^H (\mathbf{A}_i \mathbf{h}_i + j\phi_i \mathbf{B}_i \mathbf{h}_i) \\ \Rightarrow J(\phi_i, \mathbf{h}_i) &= \mathbf{h}_i^H \mathbf{A}_i^H \mathbf{A}_i \mathbf{h}_i + j\phi_i \mathbf{h}_i^H (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i^H \mathbf{A}_i) \mathbf{h}_i + \phi_i^2 \mathbf{h}_i^H \mathbf{B}_i^H \mathbf{B}_i \mathbf{h}_i \\ \Rightarrow \frac{\partial J(\phi_i, \mathbf{h}_i)}{\partial \mathbf{h}_i} &= \mathbf{A}_i^H \mathbf{A}_i \mathbf{h}_i + j\phi_i (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i^H \mathbf{A}_i) \mathbf{h}_i + \phi_i^2 \mathbf{B}_i^H \mathbf{B}_i \mathbf{h}_i \end{aligned}$$

Θέτοντας την παράγωγο ίση με  $\mathbf{0}$  παίρνουμε το  $\mathbf{h}_i$  εκείνο το οποίο ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους:

$$\frac{\partial J(\phi_i, \mathbf{h}_i)}{\partial \mathbf{h}_i} \approx \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A}_i^H \mathbf{A}_i + j\phi_i (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i^H \mathbf{A}_i) + \phi_i^2 \mathbf{B}_i^H \mathbf{B}_i) \mathbf{h}_i \approx \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Παρατηρούμε ότι η (3.8) οδηγεί σε ένα πολυωνυμικό πρόβλημα ιδιοτιμών, το οποίο και στη συνέχεια θα ανάγουμε στο γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Από την (3.8) θέτοντας  $\mathbf{g}_i = \phi_i \mathbf{h}_i$ , έχουμε:

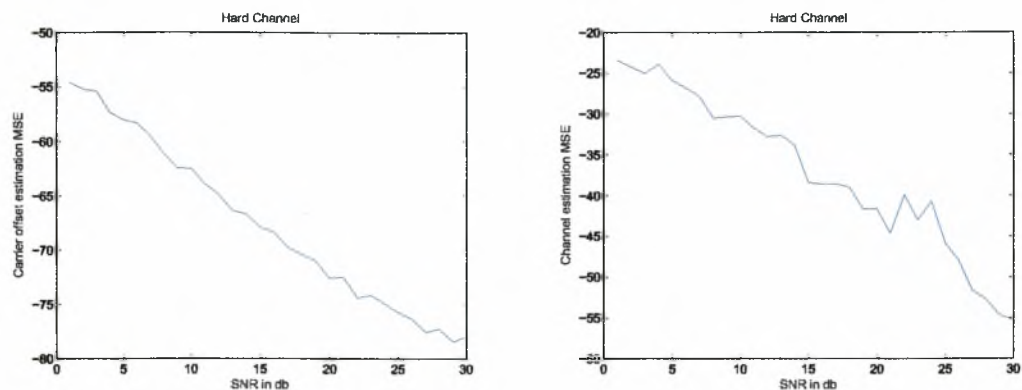
$$\mathbf{A}_i^H \mathbf{A}_i \mathbf{h}_i + j(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i^H \mathbf{A}_i) \mathbf{g}_i + \phi_i \mathbf{B}_i^H \mathbf{B}_i \mathbf{g}_i \approx \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -(\mathbf{B}_i^H \mathbf{B}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^H \mathbf{A}_i \mathbf{h}_i - j(\mathbf{B}_i^H \mathbf{B}_i)^{-1} (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i^H \mathbf{A}_i) \mathbf{g}_i - \phi_i \mathbf{g}_i \approx \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -(\mathbf{B}_i^H \mathbf{B}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^H \mathbf{A}_i & -j(\mathbf{B}_i^H \mathbf{B}_i)^{-1} - (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^H \mathbf{A}_i) \end{pmatrix}_{2L \times 2L} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{g}_i \end{pmatrix}_{2L \times 1} - \phi_i \begin{pmatrix} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{g}_i \end{pmatrix} \approx \mathbf{0} \\
&\Rightarrow \mathbf{M} \mathbf{x} - \phi_i \mathbf{x} \approx \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών με την εκτίμηση του σφάλματος φέρουσας να αποτελεί την μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα  $\mathbf{M}$  και την εκτίμηση του διανύσματος καναλιού, τα  $L$  πρώτα στοιχεία του αντίστοιχου ιδιοδιανίσματος. Από τις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν παρατηρούμε τη μέθοδο προσέγγισης με *Taylor* να δίνει καλύτερες εκτιμήσεις σφάλματος φέρουσας και διανύσματος καναλιού στο δύσκολο κανάλι, από ότι στο εύκολο (σχήματα 3.6 και 3.7).

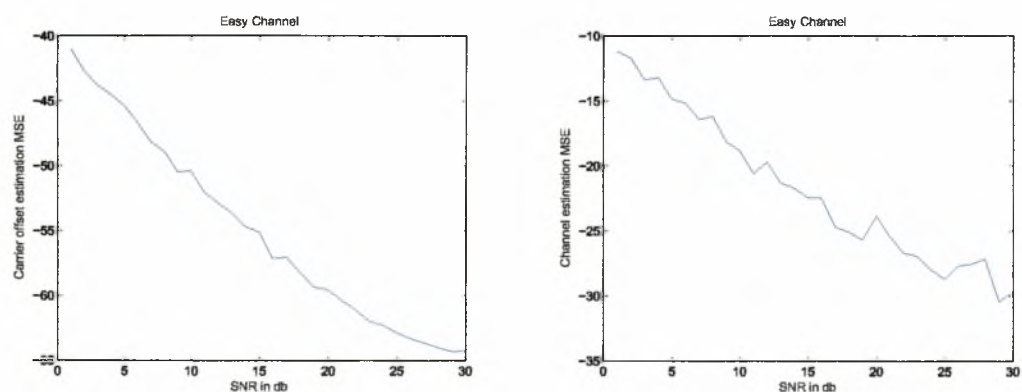
Τέλος, συγκρίνοντας τη με την πρώτη τεχνική που οδηγεί σε ένα πολυωνυμικό πρόβλημα ιδιοτιμών, παρατηρούμε την πρώτη τεχνική να δίνει καλύτερες εκτιμήσεις στο εύκολο κανάλι, ενώ η *Taylor* καταφαίρνει μόνο να δώσει μία καλύτερη εκτίμηση σφάλματος φέρουσας στο δύσκολο κανάλι (σχήματα 3.8 και 3.9). Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερους συντελεστές στην *Taylor* τεχνική με αποτέλεσμα να είχαμε σαφώς καλύτερη εκτίμηση. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε πάλι σε ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών του οποίου όμως το μέγεθος θα ήταν απαγορευτικό για SVD ανάλυση.





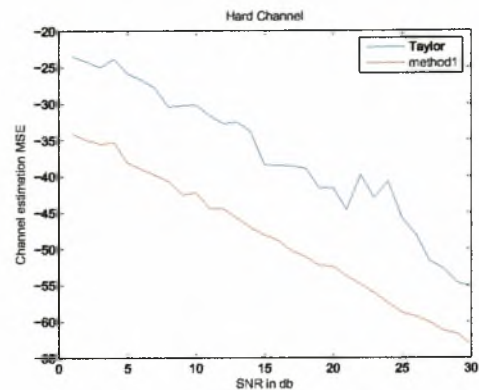
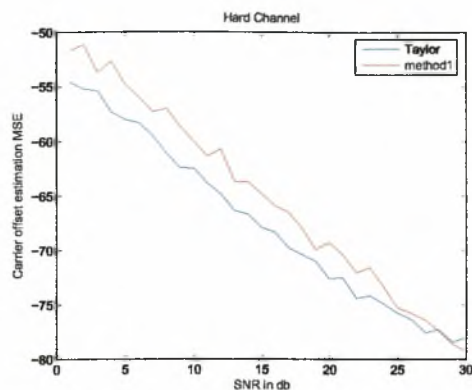
(α')  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συ- (β')  $MSE$  εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συ-  
νάρτηση με το  $SNR$ . νάρτηση με το  $SNR$ .

Σχήμα 3.6: Προσέγγιση *Taylor* - Δύσκολο κανάλι



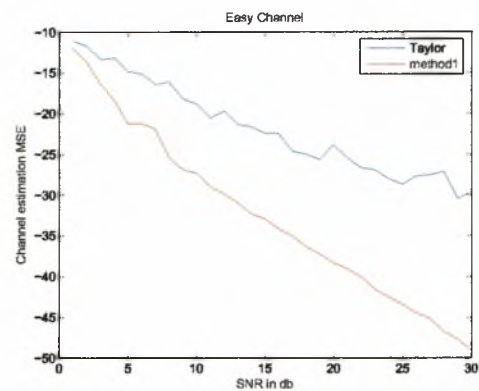
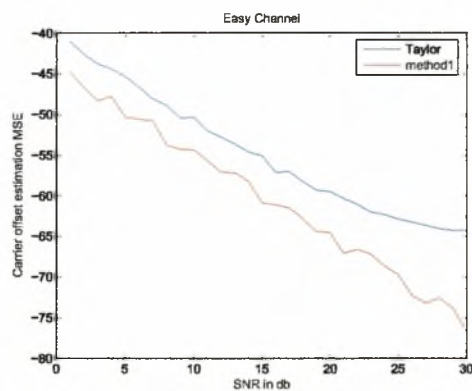
(α')  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συ- (β')  $MSE$  εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συ-  
νάρτηση με το  $SNR$ . νάρτηση με το  $SNR$ .

Σχήμα 3.7: Προσέγγιση *Taylor* - Εύκολο κανάλι



(α')  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συνάρτηση με το  $SNR$ . (β')  $MSE$  εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συνάρτηση με το  $SNR$ .

Σχήμα 3.8: Σύγκριση των δύο τεχνικών στο δύσκολο κανάλι



(α')  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συνάρτηση με το  $SNR$ . (β')  $MSE$  εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συνάρτηση με το  $SNR$ .

Σχήμα 3.9: Σύγκριση των δύο τεχνικών στο εύκολο κανάλι

## Κεφάλαιο 4

### Μέθοδος Ύψωσης σε Δύναμη

Οι τεχνικές εκτίμησης που αναλύσαμε προηγουμένως βασίζονται σε δύο βήματα:

1. SVD ανάλυση πάνω σε ένα μεγάλο πίνακα προκειμένου να πάρουμε μία βάση του χώρου του θορύβου του λαμβανόμενου σήματος.
2. SVD ανάλυση πάνω σε ένα πίνακα μικρότερου μεγέθους για την εκτίμηση του καναλιού και του σφάλματος φέρουσας.

Βασικό μειονέκτημα των τεχνικών αυτών είναι η γνώση της διάστασης του χώρου του θορύβου. Λαμβάνοντας υπ' όψη μόνο τα δείγματα της σύνθετης υπογραφής που είναι απαλλαγμένα από τη διασυμβολική παραμβολή καταλήγουμε στο ότι ο υποχώρος σήματος έχει διάσταση  $P$ , όσος και ο αριθμός των χρηστών, ενώ ο υποχώρος θορύβου  $L_c - L + 1 - P$ . Αν θέλουμε όμως να συμπεριλάβουμε όλα τα δείγματα της σύνθετης υπογραφής, τότε οι διαστάσεις των δύο υποχώρων δεν είναι τόσο προφανείς.

Στην παράγραφο αυτή θα δουλέψουμε με όλα τα δείγματα της υπογραφής και στην πορεία θα δούμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την πρώτη SVD ανάλυση με τον υπολογισμό μίας δύναμης ενός πίνακα, ενώ δεν θα χρειαστούμε καθόλου τη γνώση της διάστασης του χώρου του θορύβου.

Τα  $L_c + L - 1$  δείγματα από το  $n$ -στό σύμβολο που λαμβάνονται στο δέκτη δείξαμε ότι είναι:

$$y(nL_c + i) = s_n e^{jL_c \phi n} \underbrace{\sum_{k=1}^L h_{kC_i - k + 1} e^{j\phi k}}_{w_i}, i = 1, \dots, L_c + L - 1$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y(nL_c + 1) \\ y(nL_c + 2) \\ \vdots \\ y(nL_c + [L_c + L - 1]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{L_c + L - 1} \end{pmatrix} s_n e^{jL_c \phi n},$$

όπου τα δείγματα της σύνθετης υπογραφής έχουν ως εξής:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{L_c+L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{j\phi} & & & \\ & e^{j2\phi} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{j(L_c+L-1)\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & c_2 & \dots & 0 \\ c_{L_c} & \vdots & \ddots & c_1 \\ 0 & c_{L_c} & \dots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{L_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_L \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{W}_{(L_c+L-1) \times 1} = \mathbf{Z}_{(L_c+L-1) \times (L_c+L-1)} \mathbf{C}_{(L_c+L-1) \times L} \mathbf{h}_{L \times 1}$$

Επικεντρωνόμαστε στον χρήστη ενδιαφέροντος ( $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}, \mathbf{C}_i = \mathbf{C}, \mathbf{h}_i = \mathbf{h}$ ). Θεωρούμε ότι λαμβάνει στο δέκτη του  $N$  διανύσματα δεδομένων, κάθε ένα από τα οποία αποτελεί την υπέρθεση των συμβόλων  $P$  χρηστών. Λαμβάνοντας υπ' όψη και τα διανύσματα θορύβου που βρίσκονται στον πίνακα  $\mathcal{N}_{(L_c+L-1) \times N}$ , τα  $N$  διανύσματα δεδομένων που λαμβάνονται στο δέκτη θα έχουν ως εξής:

$$\mathbf{X}_{(L_c+L-1) \times N} = \mathbf{W}_{(L_c+L-1) \times P} \mathbf{S}_{P \times N} + \mathcal{N}_{(L_c+L-1) \times N}$$

Έστω ότι εκτελούμε SVD ανάλυση στον πίνακα αυτόσυσχέτισης του  $\mathbf{X}$ . Σύμφωνα με την ανάλυση προηγούμενης παραγράφου θα καταλήγαμε στα εξής:

$$\Rightarrow \mathbf{R}_{xx} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{pmatrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_{s_1}^2 + \sigma_n^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_{s_n}^2 + \sigma_n^2 & & & \\ \hline & & & \sigma_n^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_n^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Εκμεταλευόμενοι στη συνέχεια την ορθογωνιότητα ανάμεσα στο χώρο του θορύβου και του σήματος θα είχαμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n^H \mathbf{w}_i &= 0 \Rightarrow \mathbf{U}_n^H \mathbf{Z} \mathbf{C} \mathbf{h} = 0 \\ \Rightarrow (\mathbf{U}_n^H \mathbf{Z} \mathbf{C})^H (\mathbf{U}_n^H \mathbf{Z} \mathbf{C}) \mathbf{h} &= 0 \\ \Rightarrow (\mathbf{C}^H \mathbf{Z}^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{Z} \mathbf{C}) \mathbf{h} &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

με τον  $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$  να αποτελεί τον πίνακα ορθογώνιας προβολής στο χώρο του θορύβου. Από τη (4.2) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbf{R}_{xx}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{pmatrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sigma_{s1}^2 + \sigma_n^2} & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_{sn}^2 + \sigma_n^2} & & & \\ \hline & & & \frac{1}{\sigma_n^2} & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \sigma_n^2 \mathbf{R}_{xx}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{pmatrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{s1}^2 + \sigma_n^2} & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{sn}^2 + \sigma_n^2} & & & \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{pmatrix} \\
\Rightarrow (\sigma_n^2 \mathbf{R}_{xx}^{-1})^k &= \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{pmatrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} (\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{s1}^2 + \sigma_n^2})^k & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & (\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{sn}^2 + \sigma_n^2})^k & & & \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (\sigma_n^2 \mathbf{R}_{xx}^{-1})^k &= \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{pmatrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 0 & & & \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (\sigma_n^2 \mathbf{R}_{xx}^{-1})^k &= \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε τον πίνακα προβολής  $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$  υψώνοντας τον αντίστροφο του πίνακα αυτοσυσχέτισης σε μία δύναμη, η οποία στην πράξη δεν χρειάζεται να είναι μεγαλύτερη από την τρίτη ( $k=3$ ). Από τις (4.2) και (4.3) έχουμε:

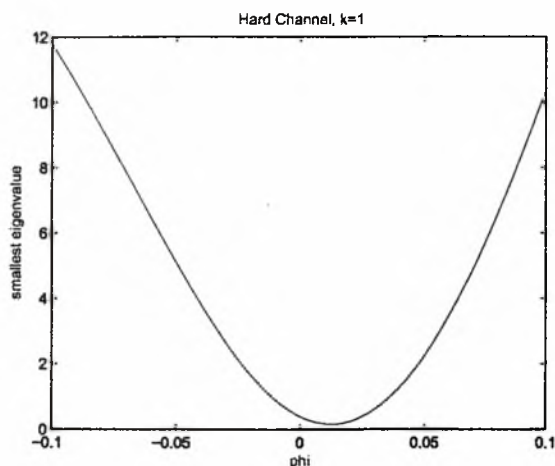
$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathbf{C}^H & \mathbf{Z}^H & (\sigma_n^2 \mathbf{R}_{xx}^{-1})^k & \mathbf{Z} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad , k = 1, 2, 3 \\
&\Rightarrow \mathcal{Q}_{L \times L} \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Τελικά καταλήξαμε πάλι στο γνωστό πρόβλημα ιδιοτιμών χωρίς όμως να κάνουμε SVD ανάλυση στον πίνακα αυτοσυσχέτισης προκειμένου να προσδιορίσουμε μία βάση του χώρου του θορύβου, χωρίς να περιοριζόμαστε στα απαλλαγμένα από διασυμβολική παρεβολή δείγματα της σύνθετης υπογραφής και χωρίς να μας απασχολεί η διάσταση του χώρου του θορύβου. Από τη στιγμή που έχουμε στη διαθεσή μας την εκτίμηση του πίνακα αυτοσυσχέτισης  $\eta$  (4.4) γίνεται:

$$\mathbf{Q}_{L \times L} \mathbf{h} \simeq \mathbf{0}$$

Συνοψίζοντας, τα βήματα που περιλαμβάνει η μέθοδος ύψωσης σε δύναμη είναι τα εξής:

1. προσέγγιση της ορθογώνιας προβολής του  $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$  υποχώρου του θορύβου υψώνοντας τον αντίστροφο του πίνακα αυτοσυσχέτισης σε μία δύναμη  $k = 1, 2, 3$ .
2. δειγματοληψία του  $\phi$  στο διάστημα  $[-0.1, 0.1]$ , όπου θεωρούμε ότι κυμαίνεται και για κάθε τιμή του αποθήκευση της μικρότερης ιδιοτιμής του πίνακα  $\mathbf{Q}$ . Η εκτίμηση του σφάλματος φέρουσας θα είναι το  $\hat{\phi}$  εκείνο που δίνει τη μικρότερη ιδιοτιμή και η εκτίμηση του καναλιού θα είναι το ιδιοδιάνυσμα που της αντιστοιχεί<sup>1</sup>.



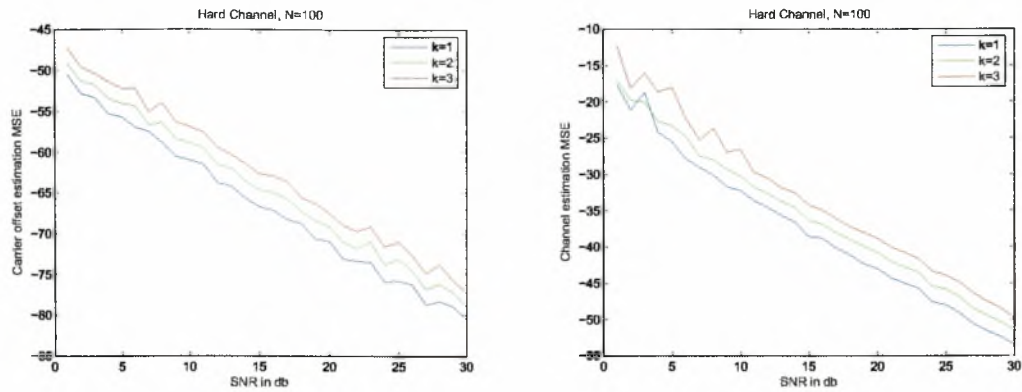
Σχήμα 4.1: Οι μικρότερες ιδιοτιμές σε συνάρτηση με τα δείγματα  $\phi$ -Δύσκολο κανάλι

$\phi : 0.0122$
$\hat{\phi} : 0.0126$
$h = 0.4070 \ 0.8150 \ 0.4070$
$\hat{h} = -0.4081 \ -0.8181 \ -0.4050$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε<sup>2</sup> το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης του σφάλματος φέρουσας και του καναλιού για διάφορες τιμές του SNR χρησιμοποιώντας  $N = 100$ ,  $N = 1000$  και  $N = 10000$  σύμβολα για τη δημιουργία του πίνακα αυτοσυσχέτισης. Παρατηρούμε ότι μόνο όταν ο αριθμητικός μέσος όρος είναι αρκετά μεγάλος ( $N \gg$ ) ισχύει ο νόμος των μεγάλων αριθμών και έχουμε καλύτερα αποτελέσματα για  $k > 1$ .

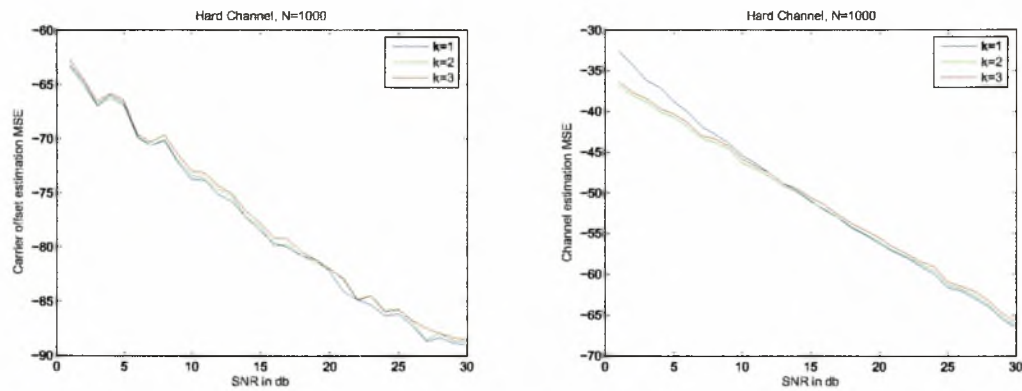
<sup>1</sup>ο κώδικας της προσομοίωσης βρίσκεται Παράρτημα Α (power.m)

<sup>2</sup>ο κώδικας βρίσκεται στο Παράρτημα (powerMSEvsSNR.m)



(α')  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συ- (β')  $MSE$  εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συ-  
νάρτηση με το  $SNR$ . νάρτηση με το  $SNR$ .

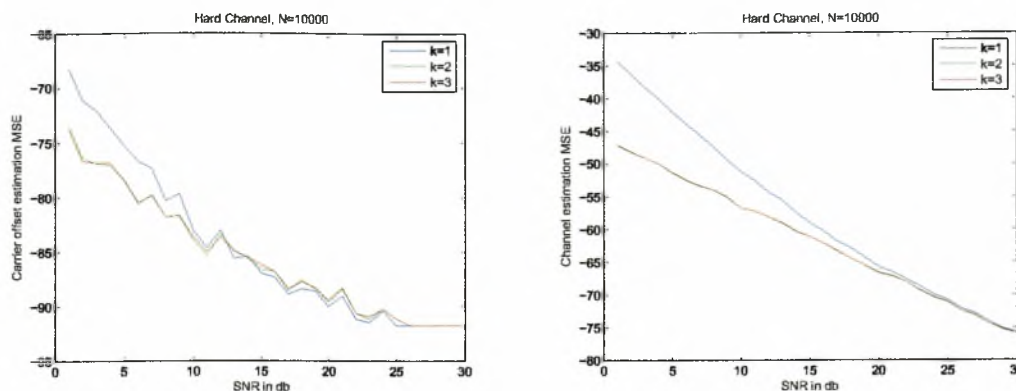
Σχήμα 4.2: Σχηματισμός του πίνακα αυτοσυσχέτισης με  $N = 100$  σύμβολα



(α')  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συ- (β')  $MSE$  εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συ-  
νάρτηση με το  $SNR$ . νάρτηση με το  $SNR$ .

Σχήμα 4.3: Σχηματισμός του πίνακα αυτοσυσχέτισης με  $N = 1000$  σύμβολα





(α')  $MSE$  εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συ- (β')  $MSE$  εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συ-  
νάρτηση με το  $SNR$ . νάρτηση με το  $SNR$ .

Σχήμα 4.4: Σχηματισμός του πίνακα αυτοσυσχέτισης με  $N = 10000$  σύμβολα

Κλείνοντας, προσομοιώνουμε την μέθοδο ύψωσης σε δύναμη με τη μέθοδο της ανάλυσης υποχώρων και στη συνέχεια επίλυσης ενός πολυωνυμικού προβλήματος ιδιοτιμών, σε περιβάλλοντα με  $SNR = 10db$  και  $SNR = 20db$ , σε συνάρτηση με τον αριθμό των συμβόλων που λαμβάνει ο δέκτης του χρήστη ενδιαφέροντος.

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης υπολογίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$\mathbf{R}_{\hat{x}\hat{x}}(n) = \lambda \mathbf{R}_{\hat{x}\hat{x}}(n-1) + \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)$$

με  $\lambda = 0.997$  να αντιστοιχεί σε ένα παράθυρο  $\frac{1}{1-\lambda} = 333.33$  συμβόλων, ενώ για τον αντίστροφο του πίνακα αυτοσυσχέτισης που χρησιμοποιείται στην μέθοδο ύψωσης σε δύναμη είναι:

$$\mathbf{R}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}(n) = \frac{1}{\lambda} \left[ \mathbf{R}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}(n-1) - \frac{\mathbf{R}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}(n-1)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{R}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}(n-1)}{\lambda + \mathbf{x}^H(n)\mathbf{R}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}(n-1)\mathbf{x}(n)} \right],$$

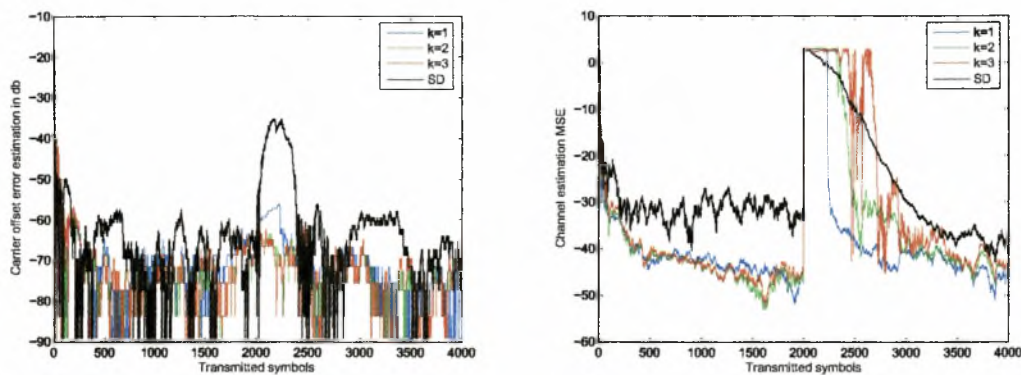
με αρχική τιμή:

$$\mathbf{R}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}(0) = \delta \mathbf{I}, \delta = \frac{100}{\sigma_n^2}$$

Εξετάζουμε ένα παράθυρο 4000 συμβόλων στο δέκτη, αλλάζοντας στο σύμβολο 2000 μία από τις δύο παραμετρούς. Αρχικά το σφάλμα είναι το ίδιο και με την πάροδο των συμβόλων η τεχνική ύψωσης σε δύναμη να συγκλίνει πρώτη, κατεβάζοντας το σφάλμα εκτίμησης σε χαμηλότερα επίπεδα. Και οι δύο μέθοδοι παρακολουθούν την αλλαγή στο κανάλι ή τη φέρουσα, που συντελείται στο σύμβολο 2000, με την μέθοδο ύψωσης σε δύναμη να συγκλίνει γρηγορότερα για  $k = 1$  και τις δυνάμεις  $k = 2, 3$  να παρουσιάζουν μία καλύτερη απόδοση μετά από έναν αριθμό λαμβανόμενων συμβόλων στο δέκτη. Για  $k = 1$ , η μέθοδος ρχνει το σφάλμα εκτίμησης γρηγορότερα, απαιτώντας περίπου 400 σύμβολα, για  $k = 2$  περίπου 500 σύμβολα, ενώ για  $k = 3$  απαιτούνται πάνω από 700 σύμβολα. Ακολουθεί η μέθοδος ανάλυσης υποχώρων, η οποία αρχικά παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά όταν παρουσιαστεί η αλλαγή σε κάποια από τις παραμέτρους. Στη συνέχεια όμως ξεπερνιέται από τη μέθοδο ύψωσης σε δύναμη, όταν ληφθεί ο κατάλληλος αριθμός συμβόλων.

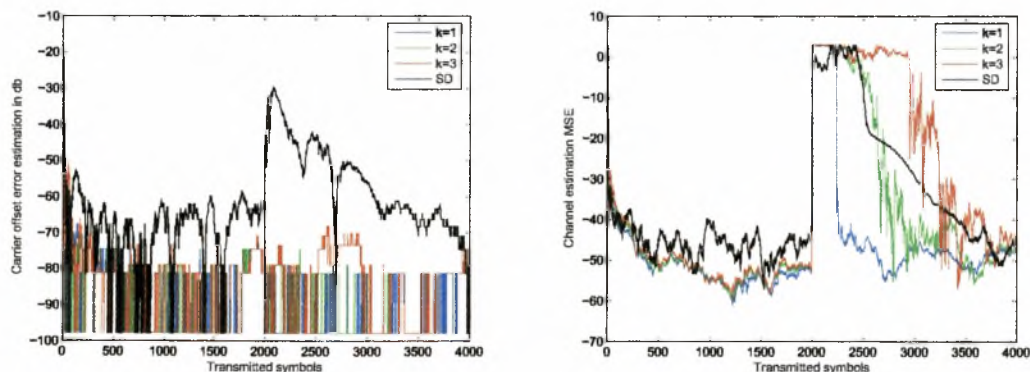


Αξίζει να σημειώσουμε ότι όταν αλλάζει η μία παράμετρος επηρεάζεται η εκτίμηση της άλλης παραμέτρου, παρόλο που αυτή μπορεί να μην μεταβάλλεται. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος ύψωσης σε δύναμη παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά στο γεγονός αυτό σε σχέση με τη μέθοδο ανάλυσης υποχώρων. Τέλος, όπως είναι αναμενόμενο για  $SNR = 20db$  παίρνουμε μικρότερα σφάλματα εκτίμησης από ότι για  $SNR = 10db$ .



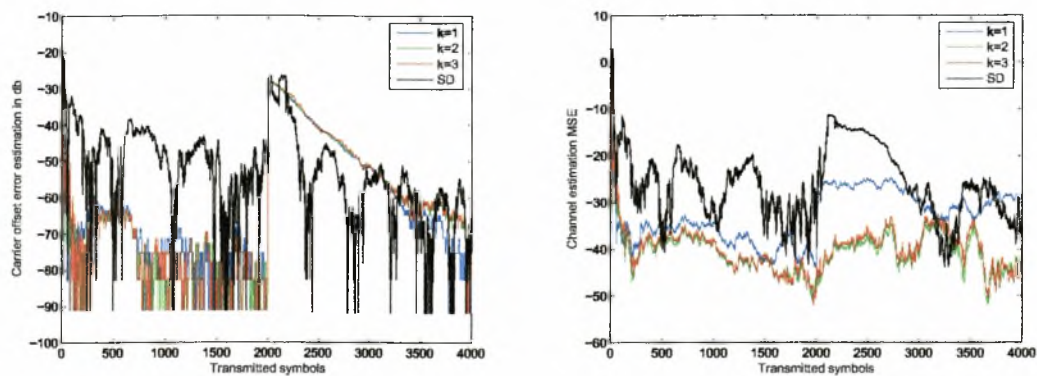
(α') Σφάλμα εκτίμησης σφάλματος φέροντας σε (β') Σφάλμα εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συνάρτηση με τον αριθμό συμβόλων που λαμβάνονται στο δέκτη. συνάρτηση με τον αριθμό συμβόλων που λαμβάνονται στο δέκτη.

Σχήμα 4.5: Αλλαγή καναλιού -  $SNR = 10\ db$



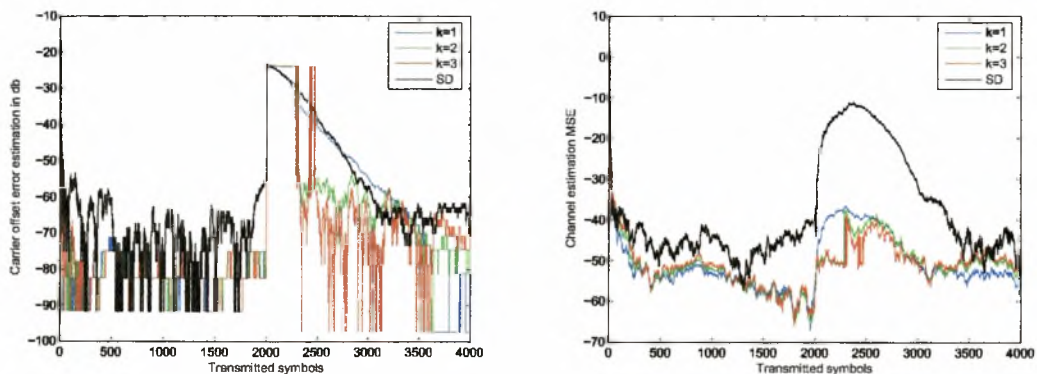
(α') Σφάλμα εκτίμησης σφάλματος φέροντας σε (β') Σφάλμα εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συνάρτηση με τον αριθμό συμβόλων που λαμβάνονται στο δέκτη. συνάρτηση με τον αριθμό συμβόλων που λαμβάνονται στο δέκτη.

Σχήμα 4.6: Αλλαγή καναλιού -  $SNR = 20\ db$



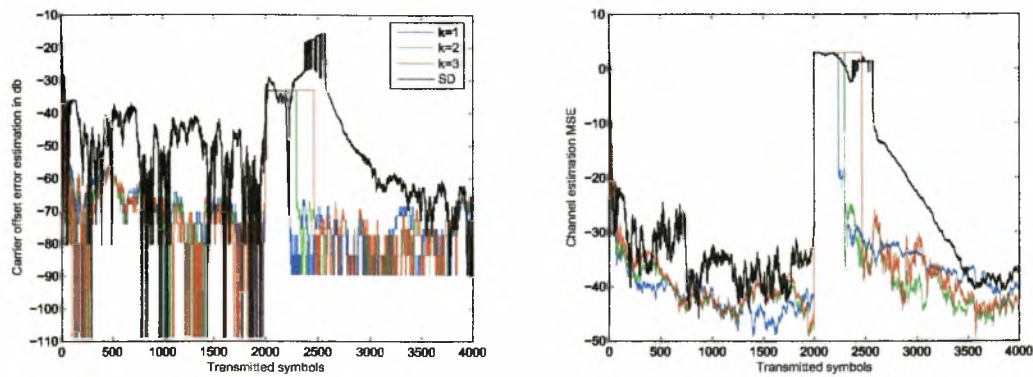
(α') Σφάλμα εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συ- (β') Σφάλμα εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε  
νάρτηση με τον αριθμό συμβόλων που λαμβάνονται συνάρτηση με τον αριθμό συμβόλων που λαμβάνον-  
στο δέκτη. ται στο δέκτη.

Σχήμα 4.7: Αλλαγή σφάλματος φέρουσας -  $SNR = 10\text{ db}$



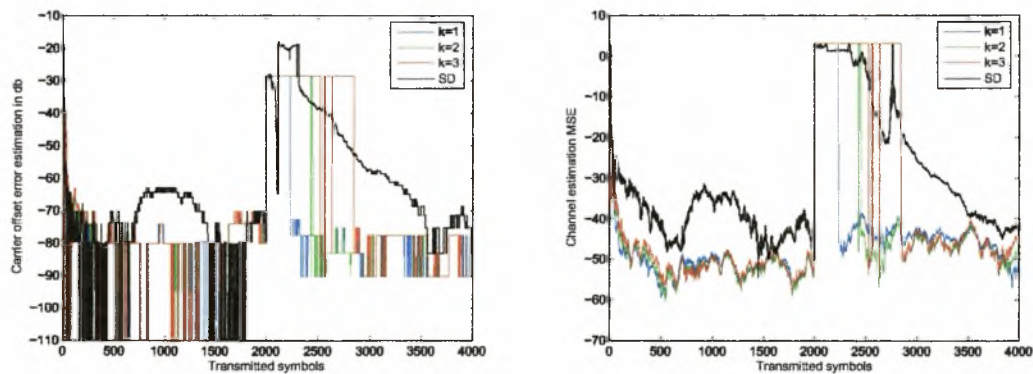
(α') Σφάλμα εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε συ- (β') Σφάλμα εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε  
νάρτηση με τον αριθμό συμβόλων που λαμβάνονται συνάρτηση με τον αριθμό συμβόλων που λαμβάνον-  
στο δέκτη. ται στο δέκτη.

Σχήμα 4.8: Αλλαγή σφάλματος φέρουσας -  $SNR = 20\text{ db}$



(α') Σφάλμα εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε (β') Σφάλμα εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συνάρτηση με τον αριθμό συμβόλων που λαμβάνονται στο δέκτη.

Σχήμα 4.9: Αλλαγή σφάλματος φέρουσας και καναλιού -  $SNR = 10 \text{ db}$



(α') Σφάλμα εκτίμησης σφάλματος φέρουσας σε (β') Σφάλμα εκτίμησης διανύσματος καναλιού σε συνάρτηση με τον αριθμό συμβόλων που λαμβάνονται στο δέκτη.

Σχήμα 4.10: Αλλαγή σφάλματος φέρουσας και καναλιού -  $SNR = 20 \text{ db}$

# Βιβλιογραφία

- [1] *Hui Lui and Guanghan Xu*: "A Subspace Method for Signature Waveform Estimation in Synchronous CDMA Systems" IEEE TRANSACTIONS ON COMMUNICATIONS, VOL. 44, NO. 10, October 1996
- [2] *Kemin Li and Hui Liu*: "Joint Channel and Carrier Offset Estimation in CMDA Communications" IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 47, NO. 7, July 1999
- [3] *Samir Attalah and Hongyi Fu*: "Joint Channel and Carrier Offset Estimation in a Multiuser CDMA System" IEEE TRANSACTIONS ON COMMUNICATIONS, VOL. 6, NO. 10, October 2002
- [4] *Xenofon G. Doukopoulos George V. Moustakides*: "Blind Channel Estimation for Downlink CDMA Systems" IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMMUNICATIONS, ICC'2003, Alaska, USA, May 2003.
- [5] *Bernard Sklar*: "Digital Communications" Prentice Hall
- [6] *Nevio Benvenuto - Giovanni Cherubini*: "Algorithms for Communications Systems and their Applications" John Wiley & Sons Ltd.
- [7] *James P. Reilly*: "Lecture Notes: Matrix Computations for Signal Processing" Department of Electrical and Computer Engineering McMaster University
- [8] *D.Steven Mackey, Niloufer Mackey, Christian Mehl and Volker Mehrmann*: "Vector Spaces of Linearizations for Matrix Polynomials"

# Παράρτημα Α'

## Κώδικας *Matlab*

```
%*****  
%   t1.m  
%   Subspace Method for signature Estimation in CDMA  
%   systems  
%   (algorithm implementation with Noise-free data)  
%*****  
  
clc;clear;clf;  
  
% number of chips (spreading gain)  
Lc = 32;  
  
% number of users  
P = 10;  
  
% number of symbols transmitted by each user  
N = 80;  
  
% hard channel  
h1 = [0.407 0.815 0.407];  
  
% easy channel  
h2 = [0.04 -0.05 0.07 -0.21 -0.5 0.72 0.36 0.21 0.03 0.07];  
  
% choose the channel vector h1 or h2  
h = h1;  
  
% the length of the channel vector  
L = length(h);  
  
for i = 1:P  
    % the ith row of c is the Spreading Code Sequence of user i
```

```

c(i,:) = randsrc(1,Lc);

% convolution matrix of user i
H = toeplitz([c(i,:) zeros(1,L-1)],[zeros(1,L)]);

% (Lc-L+1)xL Kernel matrix of user i
C = H(L:Lc,:);

% the ith column of W(Lc-L+1)xP is the ISI free
% signature of user i
W(:,i) = C*h';
end

% the i row of S(PxN) has the symbols trasnmitted
% by user i ( BPSK modulation : [-1 1] )
S = randsrc(P,N);

%The N data vectors that are received
X = W*S; % (Lc-L+1)xN

% Singular Value Decomposition on X
[U,SS,V] = svd(X);

% U1(Lc-L+1)xP : conatains the singular vectors that
% correspond to the non-zero singular values
U1 = U(:,1:P);

% U2(Lc-L+1)x(Lc-L+1-P): conatains the singular vectors that
% correspond to the zero singular values
U2 = U(:,(P+1):(Lc-L+1));

user = 1; % the user of interest

% convolution matrix of user user
H = toeplitz([c(user,:) zeros(1,L-1)],[zeros(1,L)]);

% Kernel matrix of user 1
C = H(L:Lc,:);

% a basis for the solution space to U2'C=0
h_hat = null(U2'*C);

W_hat = C*h_hat; % estimation of the signature of user 1

nn = [1:1:L]; %Figures

err1 = abs(h-h_hat').^2;

```

```

err2 = abs(h+h_hat').^2;
err=min(err1,err2);

subplot(2,1,1) stem(nn,err); title('min ( |h-h''|^2 , |h+h''|^2)')
ylabel('estimation error'); xlabel('Channel Length')

err1 = abs(W(:,user)-W_hat).^2;
err2 = abs(W(:,user)+W_hat).^2;
err = min(err1,err2);

n = [1:(Lc-L+1)]; subplot(2,1,2) stem(n,err);
title('min(|W-W''|^2, |W+W''|^2)') ylabel('estimation error')
xlabel('ISI-free complex signatureLength')

```



```

%*****
%   t2.m
%   Subspace Method for signature Estimation in
%   CDMA systems
%   ( algorithm implementation with noisy data )
%
%*****

clc;clear;clf;

% number of chips (spreading gain)
Lc = 32;
% number of users
P = 10;
% number of symbols transmitted by each user
N = 80;
% hard channel
h1 = [0.407 0.815 0.407];
% easy channel
h2 = [0.04 -0.05 0.07 -0.21 -0.5 0.72 0.36 0.21 0.03 0.07];
% choose the channel vector h1 or h2
h = h1;
% the length of the channel vector
L = length(h);

for i = 1:P
    % the ith row of c is the Spreading Code
    % Sequence of user i
    c(i,:) = randsrc(1,Lc);
    % convolution matrix of user i
    H = toeplitz([c(i,:) zeros(1,L-1)],[zeros(1,L)]);
    % (Lc-L+1)xL Kernel matrix of user i
    C = H(L:Lc,:);
    % the ith column of W(Lc-L+1)xP is the ISI free
    % signature of user i
    W(:,i) = C*h';
end

% the i row of S(PxN) has the symbols trasnmitted
% by user i ( BPSK modulation : [-1 1] )
S = randsrc(P,N);

%The N data vectors that are received
X = W*S; % (Lc-L+1)xN

% Noise variance for different SNRs

```



```

SNRdb = [0:1:30];
SNR = 10.^(SNRdb/10); % SNR = 1/noise_var
var = 1./SNR;

TRIALS = 100;

norm_h = h/norm(h);

for i = 1:length(var)

    error = 0;

    for trials = 1:TRIALS

        S = randsrc(P,N);
        X_clear = W*S;
        % data + noise
        X = X_clear + sqrt(var(i))*randn(size(X_clear));

        % estimation of the correlation matrix
        Rxx = (1/N)*(X*X');

        [U,SS,V] = svd(Rxx);
        U1 = U(:,1:P); % signal subspace
        U2 = U(:,(P+1):(Lc-L+1)); % noise subspace
        [V1,A,V2] = svd(C_user'*U2*U2'*C_user);

        [minimum_eigenvalue,index] = min(diag(A));

        % channel estimation of trial i
        h_hat = V1(:,index)';

        % normalize its norm to one
        norm_h_hat = h_hat/norm(h_hat);

        error = error + min( norm( norm_h_hat - norm_h ) ,
                             norm( norm_h_hat + norm_h ) ) ;

    end

    MSE(i) = (1/TRIALS)*error;

end

plot(SNRdb,20*log10(MSE)) ylabel('Channel Estimation MSE')
xlabel('SNR in db') title('Easy channel')

```

```

%*****
%  method1.m
%  Join Channel and Carrier offset Estimation
%  for Downlink CDMA systems
%
%*****

clc;clear;clf;

% number of chips (spreading gain)
Lc = 32;
% number of users
P = 10;
% number of symbols transmitted by each user
N = 80;

% Carrier phase Offset phi is uniformly distributed
% over the interval [a b]
a = -0.1; b = 0.1;

% noise variance
SNRdb = 10; % SNR in db
var = make_noise(SNRdb);

% hard channel
h1 = [0.407 0.815 0.407];
% easy channel
h2 = [0.04 -0.05 0.07 -0.21 -0.5 0.72 0.36 0.21 0.03 0.07];

% Carrier phase Offset for each one of the users
phi = make_phase_offset(a,b,P);

% Generation of the user's ISI free complex signature
h = h1; L = length(h);
c = spreading_code(Lc,P);
W=complex_signature(c,phi,h,Lc,L,P);

% Isolate the Kernel matrix of the user of interest
user = 1; % assume that the first user is the one of interest
C_user = user_of_interest(user,c,L,Lc); % Kernel matrix

% The N data vectors that are received
S = make_symbols(N,phi,P,Lc); %PxN
X_clear = W*S; % (Lc-L+1)xN

```

```

% data + noise
X = X_clear + sqrt(var)*randn(size(X_clear));

% Estimation of the correlation matrix of X
Rxx = (1/N)*X*X';

% Singular Value Decomposition on Rxx
[U,SS,V] = svd(Rxx);
U1 = U(:,1:P); % signal subspace
U2 = U(:,(P+1):(Lc-L+1)); %noise subspace

% Simulation parameters
d_phi = 0.0001;
phi_samples = [a:d_phi:b];

%-----
% Joint carrier offset and channel estimation
% for the user of interest
% for all the possible values of phi, the smallest
% eigenvalue of Q and the corresponding eigenvector
% is saved
%
%-----

K = Lc-L+1; k=[1:K];

i=1; for phi_hat = [a:d_phi:b]

    z = exp(j*phi_hat);
    Z = diag(z.^k);

    Qz = U2'*Z*C_user;
    Q = Qz'*Qz;

    [A,D,B] = svd(Q);

    [J(i) m] = min(diag(D));

    p(1,i,1:L) = A(:,m);

    i=i+1;
end

% Figures and Results

fprintf('\n')

```

```

plot(phi_samples,J); xlabel('phi') title('Easy channel, SNR=10db')
ylabel('smallest eigenvalue')

[smallest_eigenvalue index] = min(J);

fprintf('Smallest eigenvalue : %2.4f\n',a)
fprintf('\n')

for n=1:L
    h_hat(n) = real(p(1,index,n));
end

fprintf('True carrier offset : %2.4f\n',phi(user))
fprintf('Estimated carrier offset: %2.4f\n',phi_samples(index))
fprintf('\n') fprintf('True channel vector:\n'); h
fprintf('Estimated channel vector:\n'); h_hat

[h_estimation phi_estimation] =
subspace_decomposition(Rxx,C_user,P,L,Lc,a,b,d_phi,K)

```

```

function W = complex_signature(c,phi,h,Lc,L,P)

K = Lc-L+1; k = [1:K];

for i = 1:P

    % convolution matrix of user i
    H = toeplitz([c(i,:) zeros(1,L-1)],[zeros(1,L)]);

    % (Lc-L+1)xL Kernel matrix of user i
    C = H(L:Lc,:);

    z = exp(j*phi(i));
    Z = diag(z.^k);

    % the ith column of W(Lc-L+1)xP is the ISI free
    % signature of user i
    W(:,i) = Z*C*h';

end

%*****

function var = make_noise(SNRdb)

SNR = 10.^(SNRdb/10); % SNR = 1/noise_var

var = 1./SNR;

%*****

function phi = make_phase_offset(a,b,P);

% Carrier phase Offset phi is uniformly distributed over
% the interval [a b]

phi = a + (b-a) * rand(1,P);

%*****

```

```

function c = spreading_code(Lc,P)

for i = 1:P

    % the ith row of c is the Spreading Code Sequence of user i
    c(i,:) = randsrc(1,Lc);

end

%*****

function C_user = user_of_interest(user,c,L,Lc)

% obtain the convolution matrix of the user
% of interest

H_user = toeplitz([c(user,:) zeros(1,L-1)],[zeros(1,L)]);

C_user = H_user(L:Lc,:);

%*****

function S = make_symbols(N,phi,P,Lc)

% the i row of s(PxN) has the symbols trasnmitted by user i
s = randsrc(P,N); n = [1:N];

for i=1:P

    e = exp(j*Lc*phi(i).*n);

    % introducing the carrier offsets to the symbols of user i
    S(i,:) = s(i,:).*e;

end

%*****

```

```

function [h_estimation phi_estimation] =
subspace_decomposition(Rxx,C_user,P,L,Lc,a,b,d_phi,K)

[U,SS,V] = svd(Rxx);

U1 = U(:,1:P); % signal subspace

U2 = U(:,(P+1):(Lc-L+1)); %noise subspace

k=[1:K]; phi_samples = [a:d_phi:b]; i=1;

for phi_hat = [a:d_phi:b]

    z = exp(j*phi_hat);
    Z = diag(z.^k);

    Qz = U2'*Z*C_user;
    Q = Qz'*Qz;

    [A,D,B] = svd(Q);

    [J(i) m] = min(diag(D));

    p(1,i,1:L) = A(:,m);

    i=i+1;
end

[smallest_eigenvalue index] = min(J);

for n=1:L
    h_estimation(n) = real(p(1,index,n));
end

```

```

%*****
%
%   Join Channel and Carrier offset Estimation
%   for Downlink CDMA systems
%   Method1 --- carrier offset estimation MSE vs SNR
%               channel estimation MSE vs SNR
%
%*****

clc;clear;clf;

% number of chips (spreading gain)
Lc = 32;
% number of users
P = 10;
% number of symbols transmitted by each user
N = 80;
% Carrier phase Offset phi is uniformly distributed
% over the interval [a b]
a = -0.1; b = 0.1;

SNRdb = [1:30]; % SNR in db
var = make_noise(SNRdb);

% hard channel
h1 = [0.407 0.815 0.407];
% easy channel
h2 = [0.04 -0.05 0.07 -0.21 -0.50 0.72 0.36 0.21 0.03 0.07];

% Carrier phase Offset for each one of the users
phi = make_phase_offset(a,b,P);

% Generation of the user's ISI free complex signature
h=h2;
L=length(h);
c=spreading_code(Lc,P);
W=complex_signature(c,phi,h,Lc,L,P);

% assume that the first user is the one of interest
user = 1;
% Kernel matrix
C_user = user_of_interest(user,c,L,Lc);

% Simulation parameters
d_phi = 0.0001; phi_samples = [a:d_phi:b]; TRIALS = 100;
K=Lc-L+1;

```



```

norm_h = h/norm(h);

for i = 1:length(var)

    error_phi = 0;
    error_channel = 0;

    for trial = 1:TRIALS

        S = make_symbols(N,phi,P,Lc); %PxN

        X_clear = W*S; % (Lc-L+1)xN

        X = X_clear + sqrt(var(i))*randn(size(X_clear));

        Rxx = (1/N)*(X*X');

        [h_estimation phi_estimation] = subspace_decomposition
            (Rxx,C_user,P,L
            ,Lc,a,b,d_phi,K);

        error_phi = error_phi + (abs(phi(user) - phi_estimation))^2;

        norm_h_hat = h_estimation/norm(h_estimation);

        error_channel = error_channel +
            min( norm( norm_h_hat - norm_h ) ,
                norm( norm_h_hat + norm_h ) );

    end

    easyoffset_MSE(i) = (1/TRIALS)*error_phi;
    easychannel_MSE(i) = (1/TRIALS)*error_channel;

end

save easyoffset_MSE; save easychannel_MSE;

figure(1) plot(SNRdb,10*log10(easyoffset_MSE)); title('Easy
Channel') ylabel('Carrier offset estimation MSE') xlabel('SNR in
db')

figure(2) plot(SNRdb,20*log10( easychannel_MSE)); title('Easy
Channel') ylabel('Channel estimation MSE') xlabel('SNR in db')

```

```

%*****
%   Taylor.m
%   Join Channel and Carrier offset Estimation for Downlink
%   CDMA systems
%   Approximation of the Z matrix with the first 2 Taylors terms
%*****

clc;clear;clf;

% number of chips (spreading gain)
Lc = 32;
% number of users
P = 10;
% number of symbols transmitted by each user
N = 80;
% Carrier phase Offset phi is uniformaly
% distributed over the interval [a b]
a = -0.1; b = 0.1;
% different values of SNR in db
SNRdb = [1:30]; var = make_noise(SNRdb);

% hard channel
h1 = [0.407 0.815 0.407];
% easy channel
h2 = [0.04 -0.05 0.07 -0.21 -0.5 0.72 0.36 0.21 0.03 0.07];

% Carrier phase Offset for each one of the users
phi = make_phase_offset(a,b,P);

% Generation of the user's ISI free complex signature
h = h2; L = length(h); c = spreading_code(Lc,P);
W=complex_signature(c,phi,h,Lc,L,P);

% Isolate the Kernel matrix of the user of interest
user = 1; % assume that the first user is the one of interest
C_user = user_of_interest(user,c,L,Lc); % Kernel matrix

K = Lc-L+1;
k = [1:K];

TRIALS = 500;

D = diag(k); 0 = zeros(L,L); I = diag(ones(1,L));

```

```

Q1 = cat(2,0,I);

norm_h = h/norm(h);

for i = 1:length(var)

    error_phi = 0;
    error_channel = 0;

    for trials = 1:TRIALS

        S = make_symbols(N,phi,P,Lc);
        X_clear = W*S; % (Lc-L+1)xN
        X = X_clear + sqrt(var(i))*randn(size(X_clear));

        Rxx = (1/N)*(X*X');
        [U,SS,V] = svd(Rxx);
        U1 = U(:,1:P); % signal subspace
        U2 = U(:,(P+1):(Lc-L+1)); % noise subspace

        A = U2'*C_user;
        B = U2'*D*C_user;

        Q2 = cat(2, -inv(B'*B)*A'*A, -j*inv(B'*B)*((A'*B)-(B'*A)));
        Q = vertcat(Q1,Q2);
        [V,SS] = eig(Q,'noblance');

        [smallest_eigenvalue index] = min(diag(SS));

        error_phi = error_phi + abs( phi(user)
            - real(smallest_eigenvalue) )^2;
        h_hat = real(V(1:L,index))';

        norm_h_hat = h_hat/norm(h_hat);
        error_channel = error_channel +
            min(norm( norm_h-norm_h_hat),
                norm( norm_h + norm_h_hat ));

    end

    Taylor_easy_offset_MSE(i) = (1/TRIALS)*error_phi;
    Taylor_easy_channel_MSE(i) = (1/TRIALS)*error_channel;
end

save Taylor_easy_offset_MSE; save Taylor_easy_channel_MSE;

```

```

figure(1) plot(SNRdb,10*log10(Taylor_easy_offset_MSE));
title('Easy Channel')ylabel('Carrier offset estimation MSE')
xlabel('SNR in db')

figure(2) plot(SNRdb,20*log10(Taylor_easy_channel_MSE));
title('Easy Channel')ylabel('Channel estimation MSE')
xlabel('SNR in db')

%*****

function [h_estimation phi_estimation] =
power_method(R,d_phi,a,b,K,L,C_user)

i=1;

k = [1:K]; for phi_hat = [a:d_phi:b]

    z = exp(j*phi_hat);
    Z = diag(z.^k);

    Q = C_user'*Z'*R*Z*C_user;

    [A,D,B] = svd(Q);

    [J(i) m] = min(diag(D));

    p(1,i,1:L) = A(:,m);

    i=i+1;
end

[smallest_eigenvalue index] = min(J);

for n=1:L
    h_estimation(n) = real(p(1,index,n));
end

phi_samples = [a:d_phi:b];

phi_estimation = phi_samples(index);

%*****

```

```

function W = power_complex_signature(c,phi,h,L,Lc,P)

K = Lc+L-1;
k = [1:K];

for i = 1:P

    % convolution matrix of user i
    C = toeplitz([c(i,:) zeros(1,L-1)],[zeros(1,L)]);

    z = exp(j*phi(i));
    Z = diag(z.^k);

    % the ith column of W(Lc-L+1)xP is the ISI free
    % signature of user i
    W(:,i) = Z*C*h';

end

%*****

function C_user = power_user_of_interest(user,c,L)
% convolution matrix

C_user = toeplitz([c(user,:) zeros(1,L-1)],[zeros(1,L)]);

%*****

```

```

%*****
% power.m
% Join Channel and Carrier offset Estimation for
% Downlink CDMA systems - power method
%*****

clc;clear;clf;

Lc = 32;
N = 80;
P = 10;

a = -0.1;
b = 0.1;

SNRdb = 10; % SNR in db
var = make_noise(SNRdb);

h1 = [0.407 0.815 0.407];
h2 = [0.04 -0.05 0.07 -0.21 -0.5 0.72 0.36 0.21 0.03 0.07];

phi = make_phase_offset(a,b,P);

h = h2;
L = length(h);
c = spreading_code(Lc,P);
W = power_complex_signature(c,phi,h,L,Lc,P)

user = 1;

C_user = power_user_of_interest(user,c,L);

S = make_symbols(N,phi,P,Lc);

X_clear = W*S;
X = X_clear + sqrt(var)*randn(size(X_clear));

Rxx = (1/N)*X*X';

% Estimation of the projection matrix UnUn' on the noise subspace
R = var*inv(Rxx);

user = 1;

```

```

i=1;
d_phi = 0.0001; K = Lc+L-1; k = [1:K]; for phi_hat = [a:d_phi:b]

    z = exp(j*phi_hat);
    Z = diag(z.^k);

    Q = C_user'*Z'*R*Z*C_user;

    [A,D,B] = svd(Q);

    [J(i) m] = min(diag(D));

    p(1,i,1:L) = A(:,m);

    i=i+1;
end

fprintf('\n') l = [a:d_phi:b];

figure(1) plot(1,J); xlabel('phi') ylabel('smallest eigenvalue')
title('Hard Channel, k=1')

[smallest_eigenvalue index] = min(J);

fprintf('Smallest eigenvalue : %2.4f\n',a)
fprintf('\n')

for n=1:L
    h_hat(n) = real(p(1,index,n));
end

fprintf('True carrier offset : %2.4f\n',phi(user))
fprintf('Estimated carrier offset: %2.4f\n',l(index))
fprintf('\n') fprintf('True channel vector:\n'); h
fprintf('Estimated channel vector:\n'); h_hat

[h_estimation phi_estimation] = power_method(R,d_phi,a,b,
                                              K,L,C_user)

```

```

%*****
% power_MSEvsSNR.m
% Join Channel and Carrier offset Estimation for
% Downlink CDMA systems
% power method - carrier offset estimation MSE vs SNR
% channel estimation MSE vs SNR
%*****

clc;clear;clf;

Lc = 32;
N = 100;
P = 10;

a = -0.1;
b = 0.1;

SNRdb = [1:30]; % SNR in db
var = make_noise(SNRdb); %Noise variance

h1 = [0.407 0.815 0.407];
h2 = [0.04 -0.05 0.07 -0.21 -0.5 0.72 0.36 0.21 0.03 0.07];

phi = make_phase_offset(a,b,P);

% Generation of the user's ISI free complex signature
h = h2; % choose the channel vector h1 or h2
L = length(h); % the length of the channel vector
K = Lc+L-1;
c = spreading_code(Lc,P);
W=power_complex_signature(c,phi,h,L,Lc,P);

% Isolate the Kernel matrix of the user of interest
user = 1;
C_user = power_user_of_interest(user,c,L);

d_phi = 0.0001;
phi_samples = [a:d_phi:b];

TRIALS = 100;

norm_h = h/norm(h);

for i = 1:length(var)

    error_phi1 = 0;

```



```

error_phi2 = 0;
error_phi3 = 0;

error_channel1 = 0;
error_channel2 = 0;
error_channel3 = 0;

for trial = 1:TRIALS

    S = make_symbols(N,phi,P,Lc);
    X_clear = W*S; % (Lc-L+1)xN
    X = X_clear + sqrt(var(i))*randn(size(X_clear));

    Rxx = (1/N)*(X*X');

    invRxx = inv(Rxx);

    R1 = var(i) * invRxx;
    R2 = ( var(i) * invRxx )^2;
    R3 = ( var(i) * invRxx )^3;

    %-----
    %   for all the possible values of phi, the smallest
    %   eigenvalue of Q and the corresponding eigenvector
    %   is saved
    %-----

    [h_hat1 phi_hat1] = power_method(R1,d_phi,a,b,K,L,C_user);
    norm_h_hat1 = h_hat1/norm(h_hat1);
    error_phi1 = error_phi1 + abs( phi(user) - phi_hat1 )^2;
    error_channel1 = error_channel1 +
        min( norm( norm_h - norm_h_hat1 ) ,
            norm( norm_h + norm_h_hat1 ) );

    [h_hat2 phi_hat2] = power_method(R2,d_phi,a,b,K,L,C_user);
    norm_h_hat2 = h_hat2/norm(h_hat2);
    error_phi2 = error_phi2 + abs( phi(user) - phi_hat2 )^2;
    error_channel2 = error_channel2 +
        min( norm( norm_h - norm_h_hat2 ) ,
            norm( norm_h + norm_h_hat2 ) );

    [h_hat3 phi_hat3] = power_method(R3,d_phi,a,b,K,L,C_user);
    norm_h_hat3 = h_hat3/norm(h_hat3);
    error_phi3 = error_phi3 + abs( phi(user) - phi_hat3 )^2;
    error_channel3 = error_channel3 +
        min( norm( norm_h - norm_h_hat3 ) ,

```

```

                                norm( norm_h + norm_h_hat3 ) );

end

offset_MSE1(i) = (1/TRIALS)*error_phi1;
offset_MSE2(i) = (1/TRIALS)*error_phi2;
offset_MSE3(i) = (1/TRIALS)*error_phi3;

channel_MSE1(i) = (1/TRIALS)*error_channel1;
channel_MSE2(i) = (1/TRIALS)*error_channel2;
channel_MSE3(i) = (1/TRIALS)*error_channel3;

end

figure(1) plot(SNRdb,10*log10(offset_MSE1),'b');hold;
plot(SNRdb,10*log10(offset_MSE2),'g')
plot(SNRdb,10*log10(offset_MSE3),'r') title('Hard Channel')
ylabel('Carrier offset estimation MSE') xlabel('SNR in db')

legend('k=1','k=2','k=3')

figure(2) plot(SNRdb,20*log10(channel_MSE1),'b');hold;
plot(SNRdb,20*log10(channel_MSE2),'g')
plot(SNRdb,20*log10(channel_MSE3),'r') title('Hard Channel')
ylabel('Channel estimation MSE') xlabel('SNR in db')

legend('k=1','k=2','k=3')

```



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074813

